第 2 章　谓词逻辑

本章学习目标

原子命题是命题逻辑中最小的单位，不能够再进行分解，这给推理带来了很大的局限性，因此我们引入谓词逻辑。通过本章学习，读者应该掌握以下内容：

- 谓词、量词、个体域和个体的概念
- 谓词逻辑公式、谓词公式的解释
- 谓词演算的永真式、等价式、蕴涵式的概念及常用的谓词演算的等价式和蕴涵式
- 指导变元、约束变元、作用域和自由变元的概念；约束变元的换名规则与自由变元的代入规则
- 前束范式的概念及转化方法、前束合取范式、前束析取范式的概念及转化方法
- 谓词演算的推理理论、全称指定规则、全称推广规则、存在指定规则和存在推广规则

2.1　谓词逻辑命题的符号化

在命题逻辑中，主要研究命题与命题之间的逻辑关系，其基本组成单位是原子命题。原子命题在命题演算中是不可分解的最小单位，不能再对原子命题的内部结构作进一步的分析，因此，使命题逻辑推理受到了很大的局限性，甚至一些简单而常见的推理都无法判断。例如，著名的苏格拉底三段论：

所有的人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以，苏格拉底是要死的。

在命题逻辑中，只能将推理中出现的 3 个简单命题符号化为 P、Q、R，将推理的形式结构符号化为 $P\wedge Q\rightarrow R$。蕴含式 $P\wedge Q\rightarrow R$ 不是重言式，虽然直觉上认为推理正确，但在命题逻辑中却无法证明它的正确性。为了克服命题逻辑的局限性，将原子命题进一步划分，特别是两个原子命题之间，常常有一些共同特性，

为了刻画命题内部的逻辑结构，分析出个体词、谓词和量词，能够表达出个体与总体之间的内在联系和数量关系，这就是谓词逻辑研究的内容。谓词逻辑也称为一阶逻辑或一阶谓词逻辑。

2.1.1 个体词与谓词

1. 个体词

个体词是指研究对象中不依赖于人的主观而独立存在的具体或抽象的客观实体。例如，小张、整数、思想、泰山、$\sqrt{3}$等都可作为个体词。将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项或个体常元。一般用小写英文字母 a，b，c，…等表示。将表示抽象的或泛指的个体词称为个体变项或个体变元。一般用小写英文字母 x，y，z，…等表示。将个体变元的取值范围称为个体域或论域。个体域可以是有限集合，例如，{1，3，5，7，9}和{a，b，c，d}等；也可以是无限集合，例如，正整数集合、实数集合等。特别地，有一个特殊的个体域，它是由宇宙间一切事物和概念构成的集合，称为全总个体域。

例如，在“2 是偶数”“x 大于 y”中，2，偶数，x，y 都是个体词，其中 2 是个体常项，x，y 是个体变项。

2. 谓词

把用来刻画个体词的性质或个体词之间相互关系的词称为谓词。考虑下面的几个命题：

（1）5 是素数。

（2）x 是有理数。

（3）8 大于 7。

（4）点 a 在点 b 与点 c 之间。

（5）x 与 y 具有关系 G。

在（1）中，5 是个体常项，“…是素数”是谓词，记为 P，并用 $P(5)$表示（1）中的命题。在（2）中，x 是个体变项，“…是有理数”是谓词，记为 H，并用 $H(x)$表示（2）中的命题。在（3）中，8，7 是个体常项，“…大于…”是谓词，记为 L，则（3）中的命题符号化为 $L(x，y)$，其中 x 表示 8，y 表示 7。在（4）中 a，b，c 是个体变项，谓词为“…在…与…之间”，记为 M，故（4）中的命题可以符号化为 $M(a，b，c)$。在（5）中，x，y 为两个个体变项，谓词为“…与…有关系 G”，所以（5）符号化为 $G(x，y)$。用谓词表达命题时，必须包括个体词和谓词两部分。

与个体词相同，谓词也有常项与变项之分。表示具体性质或关系的谓词称为谓词常项，表示抽象的或泛指的性质或关系的谓词称为谓词变项。无论是谓词常

项还是谓词变项都用大写英文字母 F，G，H，…等表示，要根据上下文区分。

一般来说，“x 是 A”类型的命题可以用 $A(x)$表示。对于“x 大于 y”这种两个个体之间关系的命题，可表达为 $B(x，y)$，这里 B 表示“…大于…”谓词。我们把 A 称为一元谓词，B 称为二元谓词，对于命题 $M(a，b，c)$，M 称为三元谓词，依次类推。通常把二元以上谓词称作多元谓词。

通常，用 $G(a)$表示个体常项 a 具有性质 G（G 是谓词），用 $G(x)$表示个体变项 x 具有性质 G（G 是一元谓词）；用 $L(a，b)$表示个体常项 a，b 具有关系 L（L 是二元谓词），用 $L(x，y)$表示个体变项 x，y 具有关系 L（L 是二元谓词）；更一般地，用 $P(x_1，x_2，\cdots，x_n)$，表示含 n 个个体变项 x_1，x_2，…，x_n 的 n 元谓词，n=1 时，$P(x_1)$表示 x_1 具有性质 P，$n\geqslant 2$ 时，$P(x_1，x_2，\cdots，x_n)$表示 x_1，x_2，…，x_n 具有关系 P，实际上，n 元谓词 $P(x_1，x_2，\cdots，x_n)$可以看作以个体域为定义域，以$\{0，1\}$为值域的 n 元函数。它不是命题，只有当用谓词常项取代 P，用 n 个个体常项代替 x_1，x_2，…，x_n 这 n 个个体变项后，才能确定它的真值，因而也就成了命题。

注意：代表个体名称的字母，它在多元谓词表达式中出现的次序与事先约定有关。

有时将不带有个体变项的谓词称为 0 元谓词，例如，$F(a)$，$H(a，b)$，$P(a_1，a_2，\cdots，a_n)$等都是 0 元谓词，当 F，H，P 为谓词常项时，0 元谓词为命题。由此，命题逻辑中的命题均可以表示成 0 元谓词，因此可以将命题看作特殊的谓词。

例 2.1.1　将下列命题在谓词逻辑中符号化，并讨论它们的真值。

（1）只有 4 是素数，8 才是素数。

（2）如果 1 小于 2，则 5 小于 4。

解　（1）设谓词 $G(x)$：x 是素数，a：4，b：8；（1）中的命题符号化为谓词的蕴涵式：

$$G(a)\rightarrow G(b)$$

由于此蕴涵式的前件为假，所以（1）中的命题为真。

（2）设谓词 $H(x，y)$：x 小于 y，a：1，b：2，c：5，d：4；（2）中的命题符号化为谓词的蕴涵式：

$$H(a，b)\rightarrow H(c，d)$$

由于此蕴涵式的前件为真，后件为假，所以（2）中的命题为假。

2.1.2　量词

仅仅定义个体词和谓词的概念，对有些命题来说，还是不能准确地进行符号化，例如，下面的两个命题：

所有的人都是要死的。

有些人是要死的。

这两个命题中的个体词和谓词都相同，区别在于“所有的”和“有些”这两个表示个体常项或个体变项之间数量关系的词。将表示个体常项或个体变项之间数量关系的词称为量词。量词包括全称量词和存在量词两种。

（1）全称量词

日常生活和数学中出现的“一切的”“任意的”“所有的”“每一个”“都”“凡”等词统称为全称量词，用符号“∀”表示。并用$\forall x$，$\forall y$表示个体域中的所有个体，用$(\forall x)F(x)$，$(\forall y)F(y)$等表示个体域中的所有个体具有性质F。

（2）存在量词

日常生活和数学中常用的“存在”“存在一个”“有一个”“至少有一个”“有些”“有的”等词统称为存在量词，用符号“∃”表示。并用$\exists x$，$\exists y$表示个体域中有的个体，用$(\exists x)F(x)$，$(\exists)F(y)$等表示个体域中有的个体具有性质F。

2.1.3　谓词逻辑中命题的符号化

下面讨论谓词逻辑中命题符号化的问题。

例 2.1.2　在个体域分别限制为（a）和（b）条件时，将下面的命题符号化。

（1）所有人都是要死的。

（2）有的人天生近视。

其中：（a）个体域D_1为人类集合。

（b）个体域D_2为全总个体域。

解　（a）令$D(x)$：x是要死的；$G(x)$：x天生近视。

（1）在个体域D_1中除人外，没有其他的事物，因而（1）可符号化为：

$$(\forall x)D(x)$$

（2）在个体域D_1中有些人是天生近视，因而（2）可符号化为：

$$(\exists x)G(x)$$

（b）在个体域D_2中除人外，还有其他的事物，因而在将（1）、（2）符号化时，必须考虑先将人分离出来，令$M(x)$：x是人。在个体域D_2中，（1）、（2）可分别描述如下：

（1）对于宇宙间的一切事物，如果事物是人，则他是要死的。

（2）在宇宙间存在着天生近视的人。

将（1）、（2）分别符号化为：

（1）$(\forall x)(M(x)\to D(x))$

（2）$(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$

在个体域D_1、D_2中命题（1）、（2）都是真命题。

命题（1）、（2）在个体域 D_1、D_2 中符号化的形式不同，主要区别在于，使用个体域 D_2 时，要将人从其他事物中区别出来，为此引进谓词 $M(x)$，像这样的谓词称为特性谓词，在命题符号化时一定要正确使用特性谓词。

例 2.1.3 在个体域分别限制为（a）和（b）条件时，将下面的命题符号化。

（1）对任意的 x，都有 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

（2）存在 x，使得 $x+4=3$。

其中：（a）个体域 D_1 为自然数集合。

（b）个体域 D_2 为实数集合。

解 令 $F(x)$：$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$；$G(x)$：$x+4=3$。

（a）在个体域 D_1 中，

（1）可符号化为：

$$(\forall x)F(x)$$

（2）可符号化为：

$$(\exists x)G(x)$$

在个体域 D_1 中命题（1）为真命题，命题（2）为假命题。

（b）在个体域 D_2 中（1）、（2）分别符号化为：

（1）$(\forall x)F(x)$

（2）$(\exists x)G(x)$

在个体域 D_2 中命题（1）、（2）都是真命题。

从上面的两例可以看出，在不同的个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同。同一个命题，在不同的个体域内，它的真值可能不同，也可能相同。若没有特别指出个体域，可采用全总个体域。

例 2.1.4 将下列命题符号化，并指出其真值。

（1）有的人戴近视眼镜。

（2）没有人登上过月球。

（3）所有人都坐过飞机。

（4）所有人的头发未必都是黑色的。

解 个体域为全总个体域，令 $M(x)$：x 是人。

（1）令 $G(x)$：x 戴近视眼镜。命题（1）符号化为：

$$(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$$

设 a 为某戴近视眼镜的人，则 $M(a)$为真，$G(a)$为真，所以 $M(a)\wedge G(a)$为真，故命题（1）为真。

（2）令 $F(x)$：x 登上过月球。命题（2）符号化为：

$$\neg(\exists x)(M(x)\wedge F(x))$$

设 b 是 1969 年登上月球完成阿波罗计划的一名美国人，则 $M(b)\wedge F(b)$为真，故命题（2）为假。

（3）令 $H(x)$：x 坐过飞机。命题（3）符号化为：

$$(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$$

设 c 为没有坐过飞机的人，则 $M(c)$为真，$H(c)$为假，所以 $M(c)\rightarrow H(c)$为假，故命题（3）为假。

（4）令 $P(x)$：x 的头发是黑色的。命题（4）可符号化为：

$$\neg(\forall x)(M(x)\rightarrow P(x))$$

我们知道有的人头发是褐色的，所以$(\forall x)(M(x)\rightarrow P(x))$为假，故命题（4）为真。

下面讨论 $n(n\geqslant 2)$元谓词的符号化问题。

例 2.1.5 将下列命题符号化。

（1）火车比汽车跑得快。

（2）有的火车比所有汽车跑得快。

（3）并不是所有的火车比汽车跑得快。

（4）不存在完全相同的两辆汽车。

解 设个体域为全总个体域。令 $C(x)$：x 是火车；$G(y)$：y 是汽车；$Q(x，y)$：x 比 y 跑得快；$S(x，y)$：x 和 y 相同。这 4 个命题分别符号化为：

（1）$(\forall x)(\forall y)(C(x)\wedge G(y)\rightarrow Q(x，y))$；

（2）$(\exists x)(C(x)\wedge(\forall y)(G(y)\rightarrow Q(x，y))$；

（3）$\neg(\forall x)(\forall y)(C(x)\wedge G(y)\rightarrow Q(x，y))$；

（4）$\neg(\exists x)(\exists y)(G(x)\wedge G(y)\wedge S(x，y))$。

2.2 谓词逻辑公式与解释

2.2.1 谓词逻辑的合式公式

与命题逻辑一样，在谓词逻辑中也同样包含命题变元和命题联结词，为了使谓词逻辑中谓词表达式符号化更加规范与准确，能正确进行谓词逻辑的演算和推理，下面介绍谓词逻辑的合式公式的概念。

首先，我们介绍在谓词逻辑公式中所使用的符号，有下面几种：

（1）个体常项符号：a，b，c，…；

（2）个体变项符号：x，y，z，…；

（3）谓词符号：F，G，H，…；

（4）函数符号：f，g，h，…；

（5）联结词符号：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；

（6）量词符号：$\forall$，$\exists$；

（7）括号及逗号：（，）以及“，”。

一个符号化的谓词表达式是由一串这些符号所组成的，但并不是任意一个由此类符号组成的表达式就对应一个正确的谓词表达式，因此要给出严格的定义。

定义 2.2.1 谓词逻辑中项的定义：

（1）任何一个个体变元或个体常元是项；

（2）若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是任意的 n 元函数，t_1，t_2，…，t_n是任意的 n 个项，则 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$是项；

（3）由有限次使用（1），（2）得到的表达式是项。

定义 2.2.2 设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是任意的 n 元谓词，t_1，t_2，…，t_n 是任意的 n 个项，则称 $P(t_1, t_2, \cdots, t_n)$为原子谓词公式，简称原子公式。

下面由原子公式给出谓词逻辑中的合式公式的递归定义。

定义 2.2.3 谓词逻辑的合式公式定义如下：

（1）原子公式是合式公式；

（2）若 A 是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

（3）若 A，B 是合式公式，则$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\leftrightarrow B)$是合式公式；

（4）若 A 是合式公式，则$(\forall x)A$、$(\exists x)A$ 是合式公式；

（5）只有有限次地应用（1）~（4）构成的符号串才是合式公式。

由上述定义可知，合式公式是按上述规则由原子公式、联结词、量词、圆括号和逗号所组成的符号串，而且命题公式是它的一个特例。

为方便起见，所指的谓词逻辑的合式公式，就是谓词公式，在不引起混淆的情况下，简称谓词公式或公式。谓词公式的最外层的括号可以省略。

例 2.2.1 在谓词逻辑中将下列命题符号化。

（1）不存在最大的数。

（2）计算机系的学生都要学离散数学。

解 取个体域为全总个体域。

（1）令 $F(x)$：x 是数，$L(x, y)$：x 大于 y；则命题（1）符号化为

$$\neg(\exists x)(F(x)\wedge(\forall y)(F(y)\rightarrow L(x, y)))$$

（2）令 $C(x)$：x 是计算机系的学生，$G(x)$：x 要学离散数学；则命题（2）可符号化为：

$$(\forall x)(C(x)\rightarrow G(x))$$

一般来说，对命题的符号化可采用以下步骤：

（1）正确理解给定的命题，必要时对命题换一个角度叙述，使其中的每个原

子命题及原子命题之间的关系清楚地显现出来；

（2）把每个原子命题分解成个体词、谓词和量词；

（3）找出合适的量词，注意全称量词（$\forall x$）后跟条件式，存在量词（$\exists x$）后跟合取式；

（4）用恰当的联结词把给定的命题联结起来。

例 2.2.2 将下列命题符号化。

（1）尽管有人聪明，但并非所有人都聪明。

（2）这只大红书柜摆满了那些古书。

解 （1）令 $C(x)$：x 聪明；$M(x)$：x 是人。则命题（1）可符号化为

$$(\exists x)(M(x)\wedge C(x))\wedge \neg(\forall x)(M(x)\rightarrow C(x))$$

（2）令 $F(x，y)$：x 摆满了 y；$R(x)$：x 是大红书柜；$Q(x)$：x 是古书；a：书柜；b：书。则命题（2）可符号化为

$$R(a)\wedge Q(b)\wedge F(a，b)$$

2.2.2 谓词的约束和替换

1．约束变元与自由变元

定义 2.2.4 在公式$\forall x\, F(x)$和$\exists x\, F(x)$中，称 x 为指导变元，$F(x)$为相应量词的辖域或作用域。在$\forall x$ 和$\exists x$ 的辖域中，x 的所有出现都称为约束出现，且称 x 为约束变元；$F(x)$中不是约束出现的其他变元均称为自由出现，且称其为自由变元。

例 2.2.3 指出下列各公式中量词的辖域及变元的约束情况。

（1）$(\forall x)(F(x，y)\rightarrow G(x，z))$

（2）$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x，y))$

（3）$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(y))\rightarrow(\exists y)(H(x)\wedge M(x，y，z))$

解 （1）$(\forall x)$的辖域是 $A=(F(x，y)\rightarrow G(x，z))$，在 A 中，x 是约束出现的，而且约束出现两次，是约束变元；y，z 均为自由出现，而且各自由出现一次，是自由变元。

（2）$(\forall x)$的辖域是$(P(x)\rightarrow(\exists y)R(x，y))$，$(\exists y)$的辖域是 $R(x，y)$，x，y 均是约束出现的，是约束变元。

（3）$(\forall x)$的辖域是$(F(x)\rightarrow G(y))$，其中 x 是约束出现的，而 y 是自由出现的，x 是约束变元，y 是自由变元。$(\exists y)$的辖域是$(H(x)\wedge M(x，y，z))$，其中 y 是约束出现的，是约束变元，而 x，z 是自由出现的，是自由变元。在整个公式中，x 约束出现一次，自由出现两次，y 约束出现一次，自由出现一次，z 自由出现一次。

2．约束变元的换名与自由变元的代入

从上面的例子可以看出，在一个公式中，某个变元可以既是约束出现，又是

自由出现。为了避免变元的约束出现与自由出现同时存在，引起概念上的混乱，可以对约束变元进行换名，由于一个公式中约束变元和自由变元所使用的标识符号与它所包含的意义无关，因此可以对谓词公式中的约束变元更改标识符号，称为约束变元的换名。约束变元的换名使得一个变元在一个谓词公式中只呈现一种形式，即自由出现形式或约束出现形式。

约束变元换名的规则：

（1）将量词的作用变元及其辖域中所有相同符号的变元用一个新的变元符号代替，公式的其余部分不变。

（2）新的变元符号是原公式中没有出现的。

（3）用（1）、（2）得到的新公式与原公式等值。

例 2.2.4 对公式$(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x, y))\wedge Q(x, y)$进行换名。

解 公式中指导变元 x 在$(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x, y))$中是约束出现，是约束变元。$x$ 在 $Q(x, y)$中是自由出现，是自由变元。x 在整个公式中既是约束变元，又是自由变元。对约束变元 x 换名为 t 后公式为：

$$(\forall t)(P(t)\rightarrow R(t, y))\wedge Q(x, y)$$

同理，对公式中的自由变元也可以更改，这种更改称作代入。自由变元的代入规则是：

（1）将公式中所有同符号的自由变元符号用新的变元符号替换。

（2）用以代入的变元符号与原公式中所有变元的名称都不能相同。

（3）用（1）、（2）得到的新公式与原公式等值。

例 2.2.5 对公式$(\exists x)(F(x)\rightarrow G(x, y))\wedge(\forall y)H(y)$代入。

解 在公式中 y 既是自由变元，又是约束变元。对自由变元 y 用变元符号 t 实施代入，经过代入后，原公式为：

$$(\exists x)(F(x)\rightarrow G(x, t))\wedge(\forall y)H(y)$$

定义 2.2.5 没有自由变元的公式称为闭式。

例如：$(\forall x)(\exists y)(P(x)\rightarrow R(x, y))\wedge(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$是闭式。

事实上，仅就个体变元而言，自由变元才是真正的变元，而约束变元只是表面上的变元，实际上并不是真正意义上的变元。换句话说，含有自由变元的公式在解释后仍是命题函数，还需要进一步赋值后才能成为命题，而不含自由变元的闭式一旦给出解释就成为命题。

另外，量词作用域中的约束变元，当论域是有限集合时，个体变元的所有可能的取代是可以枚举的。

设论域元素为 a_1，a_2，…，a_n，

则 $$(\forall x)A(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\cdots\wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)。$$

量词对变元的约束，通常与量词的次序有关。如，$(\forall x)(\exists y)(x<y)$表示对任何 x 均有 y 使得 $x<y$。$(\exists x)(\forall y)(x<y)$表示存在 x 对任何 y 都有 $x<y$，显然它的含义发生改变，并且该公式不成立。对于公式中出现的多个量词，约定从左到右的次序读出，量词顺序不能颠倒，否则将改变原公式的意义。

2.2.3　谓词逻辑公式的解释

由于公式是由个体常项符号、个体变项符号、函数符号、谓词符号通过逻辑联结词和量词连接起来的符号串，若不对它们进行具体的解释，则公式没有实际的意义。所谓公式的解释，就是将公式中的常项符号指定为常项，函数符号指定为具体函数，谓词符号指定为谓词。

定义 2.2.6　谓词逻辑公式 G 的一个解释 I，由非空论域 D 和对 G 中常项符号、函数符号、谓词符号以下列规则进行的一组指定组成：

（1）对每一个常项符号指定 D 中一个元素。

（2）对每一个 n 元函数符号，指定一个函数。

（3）对每一个 n 元谓词符号，指定一个谓词。

显然，对任意公式 G，如果给定 G 的一个解释 I，则 G 在 I 的解释下有一个真值，记作 $T_I(G)$。

例 2.2.6　设有公式：$(\exists x)(\forall y)(F(x，y)\rightarrow G(x，y))$。在如下给出的解释下，判断该公式的真值。

解　（1）解释 I 为：

D：整数集合；

$F(x，y)$：$x+y=0$；

$G(x，y)$：$x>y$。

因为对任意的 x，任意 $y\in D$，有 $x+y=0$ 为假，所以无论 $G(x，y)$为真或假，都有

$$F(x，y)\rightarrow G(x，y)\text{为真}$$

所以

$$(\exists x)(\forall y)(F(x，y)\rightarrow G(x，y))\text{为真。}$$

（2）解释 I 为：

D：整数集合；

$F(x，y)$：$xy=0$；

$G(x，y)$：$x=y$。

因为对任意的 $x\neq 0$，当 $y=0$ 时，有 $F(x，y)\rightarrow G(x，y)$为假，即有

$$(\forall y)(F(x，y)\rightarrow G(x，y))\text{为假。}$$

当 x=0，当 $y\neq 0$ 时，有 $F(x，y)\to G(x，y)$为假，即有

$$(\forall y)(F(x，y)\to G(x，y))\text{为假。}$$

所以，对任意的 $x\in D$，都有

$$(\forall y)(F(x，y)\to G(x，y))\text{为假。}$$

所以

$$(\exists x)(\forall y)(F(x，y)\to G(x，y))\text{为假。}$$

例 2.2.7 指出下面的公式在解释 I 下的真值。

（1）$G=(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x，f(a)))$

（2）$H=(\forall x)(P(x)\wedge Q(x，a))$

给出如下的解释 I：

$D=\{2，3\}$；

a：2；

$f(2)$：3、$f(3)$：2；

$P(2)$：0、$P(3)$：1；

$Q(2，2)$：1、$Q(2，3)$：1、$Q(3，2)$：0、$Q(3，3)$：1。

解 （1）
$$\begin{aligned} T_I(G)&= T_I((P(f(2))\wedge Q(2，f(2)))\vee(P(f(3))\wedge Q(3，f(2)))) \\ &= T_I((P(3)\wedge Q(2，3))\vee(P(2)\wedge Q(3，3)) \\ &= (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned} T_I(H)&=T_I(P(2)\wedge Q(2，2)\wedge P(3)\wedge Q(3，2)) \\ &=0\wedge 1\wedge 1\wedge 0 \\ &=0 \end{aligned}$$

定义 2.2.7 若存在解释 I，使得公式 G 在解释 I 下取值为真，则称公式 G 为可满足式，简称 I 满足 G。若不存在解释 I，使得 I 满足公式 G，则称公式 G 为永假式（或矛盾式）。若 G 的所有解释 I 都满足 G，则称公式 G 为永真式（或重言式）。

例 2.2.8 讨论下面公式的类型。

（1）$(\forall x)G(x)\to(\exists x)G(x)$

（2）$(\forall x)(\forall y)\neg F(x，y)\wedge(\exists x)(\exists y)F(x，y)$

（3）$(\forall x)(F(x)\to G(x))$

解 （1）公式在任何解释下的含义是：如果个体域中的每个元素都有性质 G，则个体域中的某些元素具有性质 G。$(\forall x)G(x)$为真时，$(\exists x)G(x)$也为真，所以公式 $(\forall x)G(x)\to(\exists x)G(x)$为永真式。

（2）公式在任何解释下的含义是：个体域 I 中的每个 x，y 都不具备关系 F，

但存在某些元素具有关系 F。这两个命题矛盾，所以公式$(\forall x)(\forall y)\neg F(x，y)\wedge(\exists x)(\exists y)F(x，y)$为永假式。

（3）取解释 I_1：个体域为实数集合，$F(x)$：x 是整数，$G(x)$：x 是有理数。在解释 I_1 下公式$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$为真，因而公式不为矛盾式。

取解释 I_2：个体域仍为实数集合，$F(x)$：x 是整数，$G(x)$：x 是无理数。在解释 I_2 下公式$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$为假，因而不为永真式。

由上述讨论可知公式为可满足式。

2.3　谓词逻辑公式的等价与蕴涵

2.3.1　谓词逻辑的等价公式

在谓词逻辑中，有些命题可以有不同的符号化形式。例如，命题“不存在不死的人”，论域为全总个体域，设 $M(x)$：x 是人，$D(x)$：x 是要死的。下面有两种不同的符号化形式。

（1）$\neg(\exists x)(M(x)\wedge\neg D(x))$

（2）$(\forall x)(M(x)\rightarrow D(x))$

上面的两式都是正确的。我们称（1）与（2）是等值的，下面给出等值式的概念。

定义 2.3.1　设 A、B 是谓词逻辑中的任意两个公式，设它们有相同的个体域 E，若对任意的解释 I 都有 $T_I(A)=T_I(B)$，则称公式 A、B 在 E 上是等值的，记作 $A\Leftrightarrow B$。

等值公式也可以定义为：

设 A、B 是谓词逻辑中的任意两个公式，设它们有相同的个体域 D，若 $A\leftrightarrow B$ 是永真式，则称公式 A、B 在 D 上是等值的。

有了谓词公式的等值和永真、永假等的概念，现在可以给出谓词演算的一些基本而重要的等值式。

1．命题公式的推广

在命题逻辑中，任意一个永真式，其中同一命题变元用同一命题公式代换，所得到的公式仍为永真式，我们把这个情况推广到谓词逻辑之中，命题逻辑中的永真公式中的所有相同的变元用谓词逻辑中的同一公式代替，所得到的谓词公式为永真式，所以命题演算中的等价公式都可以推广到谓词逻辑中使用。例如

$(\forall x)G(x)\Leftrightarrow\neg\neg(\forall x)G(x)$

$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\Leftrightarrow(\forall x)(\neg A(x)\vee B(x))$

$(\forall x)\neg(F(x)\vee G(x))\Leftrightarrow(\forall x)(\neg F(x)\wedge\neg G(x))$

2. 量词的转换

为了说明量词的转换，先看下面的例子。

例如，设 $L(x)$：x 说汉语。$\neg L(x)$：x 不说汉语。论域为人类。则

$(\forall x)L(x)$表示所有的人都说汉语。

$\neg(\forall x)L(x)$表示不是所有的人都说汉语。

$(\exists x)\neg L(x)$表示有的人不说汉语。

从它们的意义上可以看出$\neg(\forall x)L(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg L(x)$。又，

$(\exists x)L(x)$表示有的人说汉语。

$\neg(\exists x)L(x)$表示没有人说汉语。

$(\forall x)\neg L(x)$表示所有的人都不说汉语。

从意义上可以看出$\neg(\exists x)L(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg L(x)$。

通过上面的例子，说明了

$$\neg(\forall x)G(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg G(x)$$

$$\neg(\exists x)G(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg G(x)$$

下面给出严格的证明。

定理 2.3.1 设 $G(x)$是谓词公式，存在有关量词否定的两个等价公式：

（1）$\neg(\forall x)G(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg G(x)$

（2）$\neg(\exists x)G(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg G(x)$

证明

（1）设个体域为有限集合 $D=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$，则有

$$\begin{aligned}\neg(\forall x)G(x)&\Leftrightarrow\neg(G(a_1)\wedge G(a_2)\wedge\cdots\wedge G(a_n))\\&\Leftrightarrow\neg G(a_1)\vee\neg G(a_2)\vee\cdots\vee\neg G(a_n)\\&\Leftrightarrow(\exists x)\neg G(x)\end{aligned}$$

设个体域 D 为无限的，若$\neg(\forall x)G(x)$的真值为真，则$(\forall x)G(x)$的真值为假，即存在个体 $a\in D$ 使 $G(a)$的真值为假，所以$\neg G(a)$为真，因此有$(\exists x)\neg G(x)$的真值为真。即$\neg(\forall x)G(x)$的真值为真时，一定有$(\exists x)\neg G(x)$的真值也为真。

若$\neg(\forall x)G(x)$的真值为假，则$(\forall x)G(x)$的真值为真，即对任意个体 $a\in D$，都有 $G(a)$的真值为真，所以$\neg G(a)$为假，因此有$(\exists x)\neg G(x)$的真值为假。即$\neg(\forall x)G(x)$的真值为假时，一定有$(\exists x)\neg G(x)$的真值也为假。

所以等价式$\neg(\forall x)G(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg G(x)$成立。

（2）设个体域是有限的，为：$D=\{a_1，a_2，\cdots，a_n\}$，则有

$$\begin{aligned}\neg(\exists x)G(x)&\Leftrightarrow\neg(G(a_1)\vee G(a_2)\vee\cdots\vee G(a_n))\\&\Leftrightarrow\neg G(a_1)\wedge\neg G(a_2)\wedge\cdots\wedge\neg G(a_n)\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg G(x)$

设个体域 D 为无限的，若 $\neg(\exists x)G(x)$的真值为真，则$(\exists x)G(x)$的真值为假，即对任意个体 $a\in D$，都有 $G(a)$的真值为假，所以对任意个体 $a\in D$，都有 $\neg G(a)$为真，因此有$(\forall x)\neg G(x)$的真值为真。即若 $\neg(\exists x)G(x)$的真值为真时，则一定有$(\forall x)\neg G(x)$的真值也为真。

若$\neg(\exists x)G(x)$的真值为假，则$\exists x\, G(x)$的真值为真，即存在个体 $a\in D$，使得 $G(a)$的真值为真，所以有$\neg G(a)$的真值为假，因此有$(\forall x)\neg G(x)$的真值为假。即若有$\neg(\exists x)\, G(x)$的真值为假时，则有$(\forall x)\neg G(x)$的真值也为假。

所以等价式 $\neg(\forall x)G(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg G(x)$成立。

此定理称为量词转换律，当把量词前面的$\neg$符号移到量词后面时，全称量词转换为存在量词，存在量词转换为全称量词。

3．量词辖域的扩张与收缩

定理 2.3.2 设 $G(x)$是任意的含自由出现个体变项 x 的公式，B 是不含 x 出现的公式，则有：

（1）$(\forall x)(G(x)\vee B)\Leftrightarrow(\forall x)G(x)\vee B$

（2）$(\forall x)(G(x)\wedge B)\Leftrightarrow(\forall x)G(x)\wedge B$

（3）$(\forall x)(G(x)\to B)\Leftrightarrow(\exists x)G(x)\to B$

（4）$(\forall x)(B\to G(x))\Leftrightarrow B\to(\forall x)G(x)$

（5）$(\exists x)(G(x)\vee B)\Leftrightarrow(\exists x)G(x)\vee B$

（6）$(\exists x)(G(x)\wedge B)\Leftrightarrow(\exists x)G(x)\wedge B$

（7）$(\exists x)(G(x)\to B)\Leftrightarrow(\forall x)G(x)\to B$

（8）$(\exists x)(B\to G(x))\Leftrightarrow B\to(\exists x)G(x)$

证明

（1）设 D 是个体域，I 为任意解释，即用确定的命题及确定的个体代替出现在$(\forall x)(G(x)\vee B)$和$(\forall x)G(x)\vee B$ 中的命题变元和个体变元，于是得到两个命题，若对$(\forall x)(G(x)\vee B)$代替之后所得命题的真值为真，此时必有 $G(x)\vee B$ 的真值为真；因而 $G(x)$真值为真或 B 的真值为真，若 B 的真值为真，则$(\forall x)G(x)\vee B$ 的真值为真；若 B 的真值为假，则必有对 D 中任意 x 都使得 $G(x)$的真值为真，所以$(\forall x)\, G(x)$为真，从而$(\forall x)G(x)\vee B$ 为真。

若对$(\forall x)(G(x)\vee B)$代替之后所得命题的真值为假，则 $G(x)$和 B 的真值必为假，因此$(\forall x)G(x)\vee B$ 的真值为假；所以$(\forall x)(G(x)\vee B)$为假，有$(\forall x)G(x)\vee B$ 为假。

（2）、（5）和（6）证明与（1）类似，证明过程略。

（3）$(\forall x)(G(x)\to B)\Leftrightarrow(\forall x)(\neg G(x)\vee B)$

$\Leftrightarrow(\forall x)\neg G(x)\vee B$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)G(x) \vee B$

$\Leftrightarrow (\exists x)G(x) \to B$

（4）、（7）、（8）证明与（3）类似，证明过程略。

4. 量词的分配律

定理 2.3.3 设 $G(x)$、$H(x)$是任意包含约束出现个体变元 x 的公式，则有：

（1）$(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) \Leftrightarrow (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$

（2）$(\exists x)(G(x) \vee H(x)) \Leftrightarrow (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$

证明

（1）设 D 是任一个体域，若$(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$的真值为真，则对任意 $a \in D$，有 $G(a)$和 $H(a)$同时为真，即$(\forall x)G(x)$为真、$(\forall x)H(x)$为真，从而$(\forall x) G(x) \wedge (\forall x)H(x)$为真。

若$(\forall x)(G(x) \wedge H(x))$的真值为假，则对任意 $a \in D$，有 $G(a)$和 $H(a)$不能同时为真，即$(\forall x)G(x)$和$(\forall x)H(x)$的真值不能同时为真，从而$(\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$的真值为假。

综上所述$(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) \Leftrightarrow (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x)$。

（2）设 D 是任一个体域，若$(\exists x)(G(x) \vee H(x))$的真值为真，则存在 $a \in D$，使得 $G(a) \vee H(a)$为真，即 $G(a)$为真或 $H(a)$为真，即$(\exists x)G(x)$为真或$(\exists x)H(x)$为真，从而$(\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$为真。

若$(\exists x)((G(x) \vee H(x))$的真值为假，则存在 $a \in D$，使得 $G(a) \vee H(a)$为假，此时，$G(a)$为假，$H(a)$为假，从而$(\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$的真值为假。

综上所述$(\exists x)(G(x) \vee H(x)) \Leftrightarrow (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x)$。

要进行等价演算，除了以上重要的等值式外，还要记住下面 3 条规则：

（1）置换规则

设$\varphi(A)$是含公式 A 的公式，$\varphi(B)$是用公式 B 代替$\varphi(A)$中所有的 A 之后得到的公式，若 $A \Leftrightarrow B$，则$\varphi(A) \Leftrightarrow \varphi(B)$。

（2）换名规则

设 A 为任意一个公式，将 A 中某量词辖域中约束出现的个体变元的所有出现及相应的指导变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个个体变元符号，公式中其余部分不变，所得公式与原公式等值。

（3）代替规则

设 A 为任一公式，将 A 中某个自由出现的个体变元的所有出现用 A 中未曾出现过的某个个体变元符号代替，公式中其余部分不变，所得公式与原公式等值。

例 2.3.1 证明下列各等价式。

（1）$\neg(\exists x)(F(x) \wedge G(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(F(x) \to \neg G(x))$

（2）$\neg(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))\Leftrightarrow(\exists x)(F(x)\wedge\neg G(x))$

证明

（1）$\neg(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)\neg(F(x)\wedge G(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\neg F(x)\vee\neg G(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(F(x)\rightarrow\neg G(x))$

（2）$\neg(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg(F(x)\rightarrow G(x))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg(\neg F(x)\vee G(x))$

$\Leftrightarrow(\exists x)(F(x)\wedge\neg G(x))$

2.3.2　谓词逻辑的蕴涵公式

定义 2.3.2　设 A、B 是谓词逻辑中的任意两个公式，若 $A\rightarrow B$ 是永真式，则称公式 A 蕴涵公式 B，记作 $A\Rightarrow B$。

定理 2.3.4　下列蕴涵式成立

（1）$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

（2）$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

（3）$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)$

（4）$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$

（5）$(\exists x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

证明

（1）设$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$在任意解释下的真值为真，即对个体域中的每一个 x，都能使 $A(x)$的真值为真或者对个体域中的每一个 x 都能使 $B(x)$的真值为真，无论哪种情况，对于个体域中的每一个 x 都能使 $A(x)\vee B(x)$的真值为真。因此，蕴涵式$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$成立。

（2）设个体域为 D，在解释 I 下$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$的真值为真，即存在 $a\in D$ 使得 $A(a)\wedge B(a)$为真，从而 $A(a)$为真，$B(a)$为真，故有$(\exists x)A(x)$、$(\exists x)B(x)$均为真，所以，蕴涵式$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$成立。

（3）设个体域为 D，在解释 I 下$(\forall x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)$的真值为假，即存在 $a\in D$ 使得 $A(a)\rightarrow B(a)$为假，所以蕴涵式$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)$成立。

（4）$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow((\exists x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\vee((\exists x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\vee(\neg(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\vee\neg(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow \neg((\forall x)(A(x)\to B(x))\wedge(\exists x)A(x))\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow((\forall x)(A(x)\to B(x))\wedge(\exists x)A(x))\to(\exists x)B(x)$

设个体域为 D，在解释 I 下$(\forall x)(A(x)\to B(x))\wedge(\exists x)A(x)$的真值为真，则存在 $a\in D$ 使得 $A(a)$真值为真，$A(a)\to B(a)$真值为真，由于 $A(a)$真值为真，故 $B(a)$真值为真，从而$(\exists x)B(x)$真值为真。所以$((\forall x)(A(x)\to B(x))\wedge(\exists x)A(x))\to(\exists x)B(x)$为永真式，即蕴涵式$(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow (\exists x)A(x)\to(\exists x) B(x)$成立。

（5）$(\exists x)A(x)\to(\forall x)B(x)\Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)\vee(\forall x)B(x)$

$\Rightarrow (\forall x)(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to B(x))$

2.3.3 多个量词的使用

对于多量词，我们只讨论两个量词的情况，更多量词的使用方法和它们类似。对于二元谓词如果不考虑自由变元，可以有以下八种情况。

$(\forall x)(\forall y)A(x，y)$ $(\forall y)(\forall x)A(x，y)$

$(\exists x)(\exists y)A(x，y)$ $(\exists y)(\exists x)A(x，y)$

$(\forall x)(\exists y)A(x，y)$ $(\exists y)(\forall x)A(x，y)$

$(\exists x)(\forall y)A(x，y)$ $(\forall y)(\exists x)A(x，y)$

例如，设 $A(x，y)$表示 x 和 y 约数的个数相同，论域为正整数集合，则

$(\forall x)(\forall y)A(x，y)$：表示任意正整数 x 和任意正整数 y 的约数个数相同。

$(\forall y)(\forall x)A(x，y)$：表示任意正整数 y 和任意正整数 x 的约数个数相同。

显然上面两个语句的含义是相同的。因此有

$$(\forall x)(\forall y)A(x，y)\Leftrightarrow(\forall y)(\forall x)A(x，y)$$

同理

$(\exists x)(\exists y)A(x，y)$：表示存在正整数 x 和 y，正整数 x 与正整数 y 的约数个数相同。

$(\exists y)(\exists x)A(x，y)$：表示存在正整数 x 和 y，正整数 y 与正整数 x 的约数个数相同。

这两个语句的含义是相同的。因此有：

$$(\exists x)(\exists y)A(x，y)\Leftrightarrow(\exists y)(\exists x)A(x，y)$$

但是，$(\forall x)(\exists y)A(x，y)$表示对任意正整数 x，都存在着与它约数个数相同的正整数。

$(\exists y)(\forall x)A(x，y)$表示存在一个正整数 y，所有的正整数都与它有相同的约数个数。

$(\exists x)(\forall y)A(x，y)$表示存在一个正整数 x，任意正整数都与它有相同的约数个数。

$(\forall y)(\exists x)A(x，y)$表示对任意正整数 y，都存在着与它约数个数相同的正整数。

上面 4 种语句，由于全称量词和存在量词的顺序不同而表达的含义各不相同，因此全称量词和存在量词在公式中出现的次序，不能随意调换。具有两个量词的谓词公式，它们有如下的等价和蕴涵关系。

$$(\forall x)(\forall y)A(x，y)\Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)A(x，y)$$

$$(\exists x)(\exists y)A(x，y)\Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)A(x，y)$$

$$(\forall x)(\forall y)A(x，y)\Rightarrow (\exists y)(\forall x)A(x，y)$$

$$(\forall y)(\forall x)A(x，y)\Rightarrow (\exists x)(\forall y)A(x，y)$$

$$(\exists y)(\forall x)A(x，y)\Rightarrow (\forall x)(\exists y)A(x，y)$$

$$(\exists x)(\forall y)A(x，y)\Rightarrow (\forall y)(\exists x)A(x，y)$$

$$(\forall x)(\exists y)A(x，y)\Rightarrow (\exists y)(\exists x)A(x，y)$$

$$(\forall y)(\exists x)A(x，y)\Rightarrow (\exists x)(\exists y)A(x，y)$$

与命题逻辑一样，谓词逻辑也有对偶定理。

定义 2.3.3 设谓词公式 G，不包含联结词→，↔。把 G 中出现的联结词∧，∨互换；命题常量 T，F 互换；量词∀，∃互换之后得到的公式称为 G 的对偶公式，记作 G^*。

若公式 G 中包含联结词→，↔，在写出 G 的对偶公式时，首先把公式中的联结词→，↔通过联结词¬、∧，∨等价代换。然后再写出它的对偶公式。

例如，$G=(\forall x)(\exists y)(A(x，y)\wedge B(x，y))\vee(\exists x)(\forall y)C(x，y)$，则 G 的对偶公式为：

$$G^* =(\exists x)(\forall y)(A(x，y)\vee B(x，y))\wedge(\forall x)(\exists y)C(x，y)。$$

注意：对偶是相互的。有$(G^*)^* = G$。

定理 2.3.5（对偶定理） 设 A、B 是任意两个公式并且不包含联结词→，↔。若 $A\Leftrightarrow B$，则 $A^*\Leftrightarrow B^*$。

2.4 前束范式

在命题演算中，常将公式化为规范形式。对于谓词演算，也有类似的情况，任何一个谓词演算公式都可以化为与它等价的范式形式。

定义 2.4.1 一个谓词公式，如果量词均在公式的开头，且辖域延伸到公式的末尾，则该公式称为前束范式。

前束范式有如下的形式：

$$\square v_1\square v_2\cdots\square v_n A$$

其中，□可以是全称量词∀或存在量词∃，$v_i(i=1，2，\cdots，n)$是个体变元，A 是没有量词的谓词公式。

例如$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(A(x，y)\wedge B(y，z))$、$(\forall x)(\exists y)(\neg A(x)\rightarrow B(x，y))$等都是前束范式。

定理 2.4.1 任意一个谓词公式都可以化为与它等价的前束范式。

证明

首先利用等价公式将谓词公式中的联结词→，↔去掉；其次利用量词的转化规则将量词前面的否定深入到谓词前面；再利用换名和代入规则以及量词辖域扩张将量词移到公式的最前面，这样便可得到公式的前束范式。

这个定理实际上给出了求一个公式的前束范式的方法和步骤。下面举例说明。

例 2.4.1 求下列谓词公式的前束范式。

（1）$(\forall x)(\forall y)((\exists z)A(x，z)\wedge A(x，z))\rightarrow(\exists t)B(x，y，t)$

（2）$\neg(\forall x)((\exists y)P(x，y)\rightarrow(\exists x)(\forall y)(Q(x，y)\wedge(\forall y)(P(y，x)\rightarrow Q(x，y))))$

解 （1）$(\forall x)(\forall y)((\exists z)A(x，z)\wedge A(x，z))\rightarrow(\exists t)B(x，y，t)$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(\forall y)((\exists z)A(x，z)\wedge A(x，z))\vee(\exists t)B(x，y，t)$

（量词转化）

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)((\forall z)\neg A(x，z)\vee\neg A(x，z))\vee(\exists t)B(x，y，t)$

（换名及代入规则）

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)((\forall w)\neg A(x，w)\vee\neg A(x，z))\vee(\exists t)B(u，v，t)$

（量词辖域扩张）

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall w)(\exists t)(\neg A(x，w)\vee\neg A(x，z)\vee B(u，v，t))$

（2）$\neg(\forall x)((\exists y)P(x，y)\rightarrow(\exists x)(\forall y)(Q(x，y)\wedge(\forall y)(P(y，x)\rightarrow Q(x，y))))$

$\Leftrightarrow\neg(\forall x)(\neg(\exists y)P(x，y)\vee(\exists x)(\forall y)(Q(x，y)\wedge(\forall y)(P(y，x)\rightarrow Q(x，y))))$

（量词转化、德·摩根定律）

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x，y)\wedge(\forall x)(\exists y)(\neg Q(x，y)\vee(\exists y)(P(y，x)\wedge\neg Q(x，y))))$

（换名原则）

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x，y)\wedge(\forall x)(\exists y)(\neg Q(x，y)\vee(\exists z)(P(z，x)\wedge\neg Q(x，z))))$

（量词辖域扩张）

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x，y)\wedge(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\neg Q(x，y)\vee(P(z，x)\wedge\neg Q(x，z))))$

（换名原则）

$\Leftrightarrow(\exists x)((\exists y)P(x，y)\wedge(\forall u)(\exists v)(\exists z)(\neg Q(u，v)\vee(P(z，u)\wedge\neg Q(u，z))))$

（量词辖域扩张）

$\Leftrightarrow(\exists x)(\exists y)(\forall u)(\exists v)(\exists z)(P(x，y)\wedge(\neg Q(u，v)\vee(P(z，u)\wedge\neg Q(u，z))))$

由于演算时所用的方法不同，对于同一个谓词公式可能得到不同的前束范式，因此，给定公式的前束范式并不是唯一的。

定义 2.4.2 若一个谓词公式，具有如下形式，则称该公式为前束析取范式。

$\square v_1\square v_2\cdots\square v_n((A_{11}\wedge A_{12}\wedge\cdots\wedge A_{1t_1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\cdots\wedge A_{2t_2})\vee\cdots\vee(A_{m1}\wedge$

$A_{m2} \wedge \cdots \wedge A_{mt_m}))$

其中，□可以是全称量词∀或存在量词∃，$v_i(i=1, 2, \cdots, n)$是个体变元，A_{it_j} $(i, j=1, 2, \cdots, m)$是原子公式或其否定。

定义 2.4.3 若一个谓词公式，具有如下形式，则称该公式为前束合取范式。

$\square v_1 \square v_2 \cdots\cdots \square v_n ((A_{11} \vee A_{12} \vee \cdots \vee A_{1t_1}) \wedge (A_{21} \vee A_{22} \vee \cdots \vee A_{2t_2}) \wedge \cdots \wedge (A_{m1} \vee A_{m2} \vee \cdots \vee A_{mt_m}))$

其中，□可以是全称量词∀或存在量词∃，$v_i(i=1, 2, \cdots, n)$是个体变元，A_{it_j} $(i, j=1, 2, \cdots, m)$是原子公式或其否定。

定理 2.4.2 任意谓词公式都可以化为与其等价的前束析取范式和前束合取范式。

证明

首先按照定理 2.4.1，把它化为仅含有联结词¬、∧和∨，且联结词¬在原子谓词公式前的前束范式形式，然后再反复利用分配律就可得到前束析取范式或前束合取范式。

2.5 谓词逻辑的推理理论

谓词逻辑的推理方法可看作是命题演算推理方法的扩展。因为谓词逻辑的很多等价式和蕴涵式是命题逻辑有关公式的推广，所以命题逻辑中的推理规则，如 *P* 规则、*T* 规则和 *CP* 规则等也可在谓词演算的推理理论中推广应用。但是在谓词逻辑中，某些前提和结论可能要受到量词的限制。请看下面逻辑推理：

所有的人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

在前提和结论中都有量词出现。只有消去前提中的量词，才能应用命题逻辑中的推理规则；而推导出的结论又必须加上适当的量词，才能得到含有量词的结论。因此有如下的消去和添加量词的规则。在下面的叙述中，$A \Rightarrow B$ 中的 A、B 可分别看作是前提和结论。

1．全称指定规则（简称 *US* 规则）

这条规则有下面两种形式：

（1）$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$

（2）$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$

其中，P 是谓词，（1）中 y 为任意不在 $P(x)$中约束出现的个体变元；（2）中 c

为个体域中的任意一个个体常元。

这两个式子的含义分别是：若对于个体域中的任意个体 x，$P(x)$成立，则对个体域中任意的个体变元 y，$P(y)$成立；对任意个体域中的个体常元 c，$P(c)$成立。

两式成立的条件是：

（1）在第一式中，取代 x 的 y 应为任意的不在 $P(x)$中约束出现的个体变元。

（2）在第二式中，c 为任意个体常元。

（3）用 y 或 c 取代 $P(x)$中的约束出现的 x 时，一定要在 x 约束出现的一切地方进行取代。

在使用 US 规则时，用第一式还是第二式要根据具体情况而定。

2．全称推广规则（简称 UG 规则）

$$P(y)\Rightarrow (\forall x)P(x)$$

这个规则是对命题的量化，如果能够证明对个体域中每一个个体 y，都有 $P(y)$成立，则全称推广规则可得到结论$(\forall x)P(x)$成立。

应用本规则时，注意该式成立的条件：

（1）无论 $P(y)$中自由出现的个体变元 y 取何值时，$P(y)$均为真。

（2）取代自由出现的 y 的 x 不能在 $P(y)$中约束出现，否则可能产生 $P(y)$为真而$(\forall x)P(x)$为假的情况。

例如，取个体域为实数集合，$L(x，y)$为 $x>y$。$L(y)=(\exists x)L(x，y)$，显然 $L(y)$满足条件（1）。对 $L(y)$应用 UG 规则时，若取已约束存在的 x 取代 y，会得到$(\forall x)L(x)=(\forall x)(\exists x)(x>x)$，这是假命题，产生这种错误的原因是违背了条件（2）。若取 z 取代 y，得到$(\forall z)L(z)=(\forall z)(\exists x)L(x，z)$为真命题。

3．存在指定规则（简称 ES 规则）

$$(\exists x)P(x)\Rightarrow P(c)$$

其中，c 为个体域中使 P 成立的特定个体常元。必须注意，应用存在指定规则，其指定的个体 c 不是任意的。

此式成立的条件是：

（1）c 是使 P 为真的特定的个体常元。

（2）c 不在 $P(x)$中出现。

（3）若 $P(x)$中除约束出现的 x 外，还有其他自由出现的个体变元，此规则不能使用。

例 2.5.1　设个体域为实数集合，$G(x，y)$为 $x<y$。指出在谓词逻辑中，以$(\forall x)(\exists y)G(x，y)$（真命题）为前提，推出$(\forall x)G(x，c)$（假命题）的原因。

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x，y)$	前提引入
（2）$(\exists y)G(z，y)$	US（1）

（3）$G(z, c)$　　ES（2）

（4）$(\forall x)G(x, c)$　　UG（3）

解　由于 c 为特定的个体常元，所以$(\forall x)G(x, c)$（即为$(\forall x)(x>c)$）为假命题。按谓词逻辑推理，不能从真命题推出假命题，在以上推理过程中，第三步错误，由于 $G(z, y)$中除有约束出现的 y，还有约束出现的 z，按 ES 规则应满足条件（3），此处不能应用 ES 规则。由于使用了 ES 规则，导致了从真命题推出假命题的错误。

4. *存在推广规则（简称 EG 规则）*

$$P(c)\Rightarrow(\exists x)P(x)$$

其中，c 为个体域中的个体常元，这个规则比较明显，对于某些个体 c，若 $P(c)$成立，则个体域中必有$(\exists x)P(x)$。

该式成立的条件是：

（1）c 是特定的个体常项。

（2）取代 c 的 x 不能在 $P(c)$中出现。

例如，考虑个体域为实数集合，$G(x, y)$为 $x>y$。取 $P(0)=(\exists x)G(x, 0)$，则 $P(0)$为真命题。在使用 EG 规则时，若用 $P(0)$中已出现的 x 取代 0，得到$(\exists x)P(x)=(\exists x)(\exists x)(x>x)$，这显然是假命题，出错的原因在于违背了条件（2）。此时，若用 $P(0)$中没有出现过的个体变元 y 取代 0，得到$(\exists y)P(y)=(\exists y)(\exists x)(x>y)$，这是真命题。

例 2.5.2　证明 $(\forall x)(M(x)\rightarrow D(x))\wedge M(s)\Rightarrow D(s)$，这是著名的苏格拉底三段论的论证。

其中　$M(x)$：x 是一个人；

　　$D(x)$：x 是要死的；

　　s：苏格拉底。

证明

（1）$(\forall x)(M(x)\rightarrow D(x))$　　P

（2）$M(s)\rightarrow D(s)$　　US（1）

（3）$M(s)$　　P

（4）$D(s)$　　T（2）（3）I

例 2.5.3　判断下列的推理过程是否正确。

（1）$(\forall x)(\exists y)G(x, y)$　　P

（2）$(\exists y)G(z, y)$　　US（1）

（3）$G(z, c)$　　ES（2）

（4）$(\forall x)G(x, c)$　　UG（3）

（5）$(\exists y)(\forall x)G(x, y)$　　EG（4）

解　这个推理过程是错误的，因为从它可以得出结论：

$$(\forall x)(\exists y)G(x，y)\Rightarrow(\exists y)(\forall x)G(x，y)$$

从前面的学习中我们知道这个式子不成立。它的推导错误出现在第（3）步。$(\forall x)(\exists y)G(x，y)$的含义是：对于任意的一个 x，存在着与它对应的 y，使得 $G(x，y)$成立。但是，对$(\exists y)G(z，y)$利用 ES 规则消去存在变量后得到 $G(z，c)$的含义却是：对于任意个体 z，有同一个体 c，使得 $G(z，c)$成立。显然，$G(z，c)$不是$(\exists y)G(z，y)$的有效结论。

因此，使用 ES 规则$(\exists x)P(x)\Rightarrow P(c)$消去存在量词的条件是：$P(x)$中除 x 外没有其他自由出现的个体变元。

例 2.5.4 证明：$(\forall x)(C(x)\rightarrow(W(x)\wedge R(x)))\wedge(\exists x)C(x)\wedge Q(x) \Rightarrow (\exists x)Q(x)\wedge(\exists x)Q(x)$。

证明

（1）$(\exists x)C(x)$	P
（2）$C(y)$	ES（1）
（3）$(\forall x)(C(x)\rightarrow(W(x)\wedge R(x)))$	P
（4）$C(y)\rightarrow(W(y)\wedge R(y))$	US（3）
（5）$W(y)\wedge R(y)$	T（2）（4）I
（6）$R(y)$	T（5）I
（7）$(\exists x)R(x)$	EG（6）
（8）$Q(x)$	P
（9）$(\exists x)Q(x)$	EG（8）
（10）$(\exists x)Q(x)\wedge(\exists x)Q(x)$	T（7）（9）I

例 2.5.5 证明：$(\forall x)(A(x)\vee B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$。

证明 方法 1

（1）$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$	P
（2）$A(y)\vee B(y)$	US（1）
（3）$(\exists x)(A(x)\vee B(x))$	EG（2）
（4）$(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$	T（3）E

方法 2

（1）$\neg((\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x))$	P（假设）
（2）$(\forall x)\neg A(x)\wedge(\forall x)\neg B(x)$	T（1）E
（3）$(\forall x)\neg A(x)$	T（2）I
（4）$\neg A(y)$	US（3）
（5）$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$	P
（6）$A(y)\vee B(y)$	US（5）

（7）$B(y)$　　T（4）（6）I

（8）$(\forall x)\neg B(x)$　　T（2）I

（9）$\neg B(y)$　　US（8）

（10）$B(y)\wedge\neg B(y)$　　T（7）（9）I

例 2.5.6　给定前提：

$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(Q(y)\to R(x，y)))$

$(\forall x)(P(x)\to(\forall y)(S(y)\to\neg R(x，y)))$

证明下列结论。

$(\forall x)(Q(x)\to\neg S(x))$

证明

（1）$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(Q(y)\to R(x，y)))$　　P

（2）$P(a)\wedge\forall y(Q(y)\to R(a，y))$　　ES（1）

（3）$P(a)$　　T（2）

（4）$(\forall x)(P(x)\to\forall y(S(y)\to\neg R(x，y)))$　　P

（5）$P(a)\to(\forall y)(S(y)\to\neg R(a，y))$　　US（4）

（6）$(\forall y)(S(y)\to\neg R(a，y))$　　T（3）（5）I

（7）$(\forall y)(Q(y)\to R(a，y))$　　T（2）I

（8）$S(z)\to\neg R(a，z)$　　US（6）

（9）$Q(z)\to R(a，z)$　　US（7）

（10）$R(a，z)\to\neg S(z)$　　T（8）E

（11）$Q(z)\to\neg S(z)$　　T（9）（10）I

（12）$(\forall x)(Q(x)\to\neg S(x))$　　UG（11）

例 2.5.7　符号化下面的命题“所有的有理数都是实数，所有的无理数也是实数，任何虚数都不是实数，所以任何虚数既不是有理数也不是无理数”，并推证其结论。

证明

设 $P(x)$：x 是有理数；

$Q(x)$：x 是无理数；

$R(x)$：x 是实数；

$S(x)$：x 是虚数。

本题符号化为：$(\forall x)(P(x)\to R(x))$，$(\forall x)(Q(x)\to R(x))$，$(\forall x)(S(x)\to\neg R(x))\Rightarrow(\forall x)(S(x)\to\neg P(x)\wedge\neg Q(x))$

（1）$(\forall x)(S(x)\to\neg R(x))$　　P

（2）$S(y)\to\neg R(y)$　　US（1）

（3）$(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$	P
（4）$P(y)\rightarrow R(y)$	US（3）
（5）$\neg R(y)\rightarrow \neg P(y)$	T（4）E
（6）$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$	P
（7）$Q(y)\rightarrow R(y)$	US（6）
（8）$\neg R(y)\rightarrow \neg Q(y)$	T（7）E
（9）$S(y)\rightarrow \neg P(y)$	T（2）（5）I
（10）$S(y)\rightarrow \neg Q(y)$	T（2）（8）I
（11）$(S(y)\rightarrow \neg P(y))\wedge(S(y)\rightarrow \neg Q(y))$	T（9）（10）I
（12）$(\neg S(y)\vee \neg P(y))\wedge(\neg S(y)\vee \neg Q(y))$	T（11）E
（13）$\neg S(y)\vee(\neg P(y)\wedge \neg Q(y))$	T（12）E
（14）$S(y)\rightarrow(\neg P(y)\wedge \neg Q(y))$	T（13）E
（15）$(\forall x)(S(x)\rightarrow \neg P(x)\wedge \neg Q(x))$	UG（14）

本章小结

本章是命题逻辑的深入和扩展，通过了解命题逻辑的局限性引入了谓词、量词、个体域、个体等概念；在此基础上定义了谓词公式及对公式的解释、公式的等价、蕴涵和前束范式等内容；然后利用谓词的等价式、蕴涵式、谓词逻辑的推理理论、全称指定规则、全称推广规则、存在指定规则和存在推广规则等进行逻辑推理。

习题2

1．在谓词逻辑中将下列命题符号化。

（1）李力是大学生。

（2）每一个有理数都是实数。

（3）没有不犯错误的人。

（4）有一些自然数是素数。

（5）并非每一个实数都是有理数。

（6）没有最大素数。

（7）小张和小宋是好朋友。

（8）有些人喜欢集邮。

2．写出下列句子所对应的谓词表达式。

（1）所有的整数都是实数。

（2）某些运动员是大学生。

（3）某些教师是年老的，但是健壮的。

（4）不是所有的运动员都是教练。

（5）没有一个国家选手不是优秀的。

（6）有些大学生不钦佩运动员。

（7）有些女同志既是大学指导员又是学生。

（8）没有一个研究生不想成为科学家。

3．设个体域为整数集合，令

$$P(x,y,z): xy=z;\ E(x,y): x=y;\ G(x,y): x>y。$$

将下列命题符号化。

（1）如果 $y=1$，则对于任何 $xy=x$。

（2）如果 $xy\neq 0$，则 $x\neq 0$ 和 $y\neq 0$。

（3）如果 $xy=0$，则 $x=0$ 或 $y=0$。

（4）如果 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$，则 $x=y$。

4．令 $P(x)$：x 是质数；$E(x)$：x 是偶数；$O(x)$：x 是奇数；$D(x,y)$：x 除尽 y。将下列各式译成自然语言。

（1）$P(5)$。

（2）$E(2)\wedge P(2)$。

（3）$(\forall x)(D(2,x)\to E(x))$。

（4）$(\exists x)(E(x)\wedge D(x,6))$。

（5）$(\forall x)(\neg E(x)\to \neg D(2,x))$。

（6）$(\forall x)(E(x)\to(\forall y)(D(2,y)\to E(y)))$。

（7）$(\forall x)(P(x)\to(\exists y)(E(y)\wedge D(x,y)))$。

（8）$(\forall x)(O(x)\to(\forall y)(P(y)\to \neg D(x,y)))$。

5．用谓词表达式符号化下列命题：

（1）有一个数比任何数都大。

（2）并非一切劳动都能用机器代替。

（3）存在着偶质数。

6．对下面每个公式指出约束变元和自由变元。

（1）$(\forall x)P(x)\to P(y)$。

（2）$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\wedge(\exists x)S(x)$。

（3）$(\exists x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y))\to(\forall x)R(x)$。

（4）$(\exists x)(\forall y)P(x，y)\wedge Q(z)$。

7．利用换名原则和代入原则，使得得出的公式中，每个变元只以一种形式出现，每个约束变元只出现在一个量词的辖域内。

（1）$(\forall x)A(x)\vee(\exists y)B(x，y)$。

（2）$(\exists x)(A(x)\wedge(\forall y)B(x，y，z))\rightarrow(\exists z)C(x，y，z)$。

（3）$(\forall x)(\exists y)(F(x，z)\rightarrow G(y))\leftrightarrow H(x，y)$。

（4）$(\forall x)(\exists y)(F(x，z)\rightarrow(\exists x)G(x，y))$。

（5）$(\forall x)(\forall y)(P(x，y)\vee Q(x，y))\wedge(\forall y)H(x，y)$。

（6）$(\forall x)(\exists y)F(x，y)\rightarrow G(x)$。

8．给定个体域 $D=\{a，b，c\}$，谓词 F 和 G 分别为：

$F(a，a)=T$；$F(a，b)=F$；$F(a，c)=T$；

$F(b，a)=T$；$F(b，b)=F$；$F(b，c)=F$；

$F(c，a)=T$；$F(c，b)=T$；$F(c，c)=F$；

$G(a)=T$；$G(b)=F$；$G(c)=F$。

求下列公式在上述解释下的真值。

（1）$(\forall x)F(x，x)\rightarrow(\exists y)G(y)$。

（2）$(\forall y)(G(y)\wedge(\exists x)F(x，y))$。

（3）$(\forall x)(\exists y)F(y，x)$。

9．求下列各式的真值。

（1）$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$，其中 $P(x)$：$x=1$；$Q(x)$：$x=2$ 且论域为$\{1，2\}$。

（2）$(\forall x)(P\rightarrow Q(x))\vee R(a)$，其中 P：$2>1$，$Q(x)$：$x\leqslant 3$，$R(x)$：$x>5$，a：5 且论域为$\{-2，3，6\}$。

10．设论域为$\{a，b，c\}$，求证

$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$。

11．判断下列各式的类型。

（1）$F(x，y)\rightarrow(G(x，y)\rightarrow F(x，y))$。

（2）$(\forall x)(\exists y)A(x，y)\rightarrow(\exists x)(\forall y)A(x，y)$。

（3）$(\exists x)(\forall y)A(x，y)\rightarrow(\forall y)(\exists x)A(x，y)$。

（4）$\neg((\forall x)A(x)\rightarrow(\exists y)B(y))\wedge(\exists y)B(y)$。

12．证明

$(\forall x)(\forall y)(F(x)\rightarrow G(y))\Leftrightarrow(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall y)G(y)$。

13．把下列各式化为前束范式。

（1）$(\forall x)(A(x)\rightarrow(\exists y)B(x，y))$。

（2）$(\exists x)(\neg((\exists y)A(x，y)))\rightarrow((\exists z)B(z)\rightarrow D(x))$。

（3）$((\exists x)P(x)\lor(\exists x)Q(x))\to(\exists x)(P(x)\lor Q(x))$。

（4）$(\forall x)F(x)\to(\exists x)((\forall z)G(x，z)\lor(\forall z)H(x，y，z))$。

（5）$(\forall x)(F(x)\to G(x，y))\to((\exists y)F(y)\land(\exists z)G(y，z))$。

14．判断下列谓词逻辑中的推理是否正确：

（1）$(\forall x)(F(x)\to G(x))$，$(\forall x)(H(x)\to \neg G(x))\Rightarrow(\forall x)(H(x)\to \neg F(x))$。

（2）$(\forall x)(F(x)\lor G(x))$，$(\forall x)(G(x)\to \neg H(x))$，$(\forall x)H(x)\Rightarrow(\forall x)F(x)$。

（3）$(\exists x)F(x)\to(\forall x)G(x)\Rightarrow (\forall x)(F(x)\to G(x))$。

（4）$(\forall x)(\neg F(x)\to G(x))$，$(\forall x)\neg G(x)\Rightarrow(\exists x)F(x)$。

15．用 CP 规则证明。

（1）$(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\to(\forall x)B(x)$。

（2）$(\forall x)(A(x)\lor B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\lor(\exists x)B(x)$。

16．用推理规则证明下式：

$(\exists x)(F(x)\land S(x))\to(\forall y)(M(y)\to W(y))$，$(\exists y)(M(y)\land \neg W(y))\Rightarrow(\forall x)(F(x)\to \neg S(x))$。

17．符号化下列命题，并推证其结论。

（1）所有有理数是实数，某些有理数是整数，因此某些实数是整数。

（2）任何喜欢步行的人，他都不喜欢乘汽车，每个人或喜欢乘汽车或喜欢骑自行车。有的人不爱骑自行车，因而有人不喜欢步行。

（3）不存在能表示成分数的无理数，有理数都能表示成分数，因此，有理数都不是无理数。