第 8 章　空间解析几何与向量代数

本章学习目标

- 了解空间直角坐标系、空间点的直角坐标
- 掌握向量的概念和运算，了解向量的模和方向余弦的坐标表示
- 掌握平面方程与空间直线方程及其求法，了解它们之间的位置关系
- 了解常用的二次曲面的标准方程及其图形，了解以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程
- 了解空间曲线的参数方程和一般方程及在坐标面上的投影

8.1　空间直角坐标系与向量的概念

8.1.1　空间直角坐标系

1．空间直角坐标系

在空间任取一点O，过O点作三条两两互相垂直且具有相同长度单位的数轴，分别称为x轴（横轴）、y轴（纵轴）、z轴（竖轴），统称为坐标轴；点O称为坐标原点；任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面，即xOy，yOz和zOx坐标面.

在画空间直角坐标系时，习惯上常把x轴、y轴置于水平面上，而z轴置于铅垂线上，各坐标轴正向及顺序符合右手法则，即用右手握住z轴，且拇指指向z轴的正向，则其余四指从x轴正向以90°转向y轴正向（如图 8.1 所示）.

三个坐标平面将整个空间分成八个部分，称为八个卦限．它们的顺序规定如图 8.2 所示.

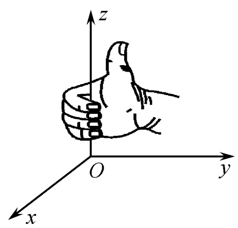

图 8.1

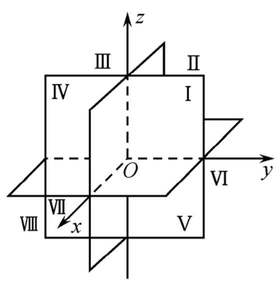

图 8.2

建立了空间直角坐标系，我们来建立空间的点和三元有序数组之间的对应关系.

设 M 为空间一个定点，过点 M 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂线，垂足依次为 P,Q,R（如图 8.3 所示），这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x,y,z. 则空间的一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z). 反之，设给定一个有序数组 (x,y,z)，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上取坐标为 x,y,z 的点 P,Q,R，过 P,Q,R 三点，分别作平面垂直于所在坐标轴，这三个平面的交点就是有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的一点 M. 这样，空间一点就与一组有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 有序数组 x,y,z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

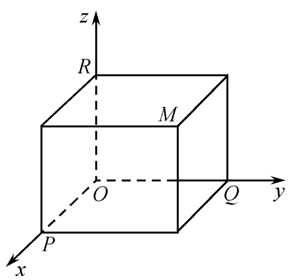

图 8.3

显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，坐标轴上的点至少有两个坐标为 0，例如，若点 M 在 x 轴上，则 $y=0$，$z=0$；若在 y 轴上，则 $x=0$，$z=0$；若在 z 轴上，则 $x=0$，$y=0$. 坐标面上的点至少有一个坐标为 0. 例如，若 M 在 xOy 面上，则 $z=0$；在 yOz 面上，则 $x=0$；在 zOx 面上，则 $y=0$.

在各卦限中点的坐标情况如下（坐标面是卦限的界面，不算在卦限内）：

卦限	点的坐标 (x, y, z)	卦限	点的坐标 (x, y, z)
Ⅰ	$x>0,\ y>0,\ z>0$	Ⅴ	$x>0,\ y>0,\ z<0$
Ⅱ	$x<0,\ y>0,\ z>0$	Ⅵ	$x<0,\ y>0,\ z<0$
Ⅲ	$x<0,\ y<0,\ z>0$	Ⅶ	$x<0,\ y<0,\ z<0$
Ⅳ	$x>0,\ y<0,\ z>0$	Ⅷ	$x>0,\ y<0,\ z<0$

2. 空间两点间的距离

设空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$. 过点 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 8.4 所示）. 显然

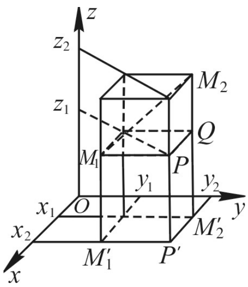

图 8.4

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1Q|^2 + |QM_2|^2 \quad （\triangle M_1QM_2 \text{ 是直角三角形}） \\ &= |M_1P|^2 + |PQ|^2 + |QM_2|^2 \quad （\triangle M_1PQ \text{ 是直角三角形}） \\ &= |M_1'P'|^2 + |P'M_2'|^2 + |QM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 . \end{aligned}$$

所以

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \qquad (8.1.1)$$

特殊地，点 $M(x, y, z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \qquad (8.1.2)$$

例 1 已知两点 $A(3, 2, 5)$ 与 $B(-1, -3, 6)$，在 x 轴上求一点 M，使 $|AM| = |BM|$.

解 因为 M 在 x 轴上，所以设 M 点的坐标为 $(x, 0, 0)$．由公式（8.1.1）得

$$|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (0-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 38} ,$$

$$|BM| = \sqrt{(x+1)^2 + (0+3)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2 + 2x + 46} .$$

由题设 $|AM| = |BM|$，于是得

$$\sqrt{x^2 - 6x + 38} = \sqrt{x^2 + 2x + 46} ,$$

解得 $x = -1$．所求点为 $M(-1, 0, 0)$．

例 2 证明以 $A(10, -1, 6)$, $B(4, 1, 9)$, $C(2, 4, 3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

证 因为

$$|AB| = \sqrt{(4-10)^2 + (1+1)^2 + (9-6)^2} = 7 ,$$

$$|AC| = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = 7\sqrt{2} ,$$

$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7 ,$$

所以三角形 ABC 为等腰三角形.

8.1.2 向量的概念及其线性运算

1. 向量的概念

在现实生活中遇到过两种量：一种是只有大小的量，称为数量（或标量），例如，时间、温度、质量、体重等；另一种是既有大小又有方向的量称为向量（或矢量），例如，力、位移、速度、加速度等．向量一般用黑体小写字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示，在几何上，向量用有向线段表示，起点为 A，终点为 B 的向量记为 $\overrightarrow{AB}$（如图 8.5 所示）．

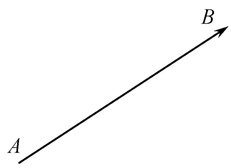

图 8.5

向量的大小（有向线段的长度）称为向量的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$（或 $\left|\overrightarrow{AB}\right|$）；模为 1 的向量称为单位向量；与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$；模为 0 的向量称为零向量，记为 $\boldsymbol{0}$，其方向任意．

在数学上一般只关心向量的大小和方向，不关心其位置．若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，则称这两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$．

即经平行移动后，两向量完全重合．这种允许平行移动的向量称为自由向量．本书所讨论的向量均为自由向量．

2. 向量的线性运算

（1）向量的加法

定义 1 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点相连，并以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到对角顶点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（见图 8.6），称为向量加法的平行四边形法则．

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移至与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，从向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点至向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量（见图 8.7），称为向量加法的三角形法则．此法则也适用于两向量平行的情形（平行四边形法则失效），并便于推广到有限个向量的加法．

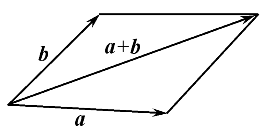

图 8.6

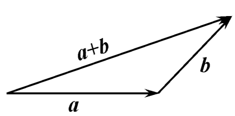

图 8.7

例如，求四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 的和，从图 8.8 中可以看出，只需把这四个向量首

尾相连，则从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是这四个向量的和向量，这种加法又称为多边形加法或折线法.

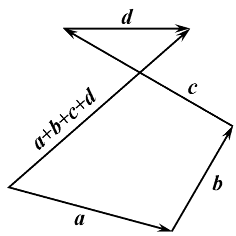

图 8.8

（2）数与向量的乘积（数乘向量）

定义 2 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个非零向量，λ 是一个非零实数，则 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积仍是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，且

1）$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

2）$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向：

$$\begin{cases}\text{当}\ \lambda>0\ \text{时，与}\ \boldsymbol{a}\ \text{同向，}\\ \text{当}\ \lambda<0\ \text{时，与}\ \boldsymbol{a}\ \text{反向.}\end{cases}$$

如果 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，规定 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

如果存在一个常数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$），则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行（或共线），记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

特别地，当 $\lambda=-1$ 时，$-\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等，方向相反，称 $-\boldsymbol{a}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

$\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$（见图 8.9）.

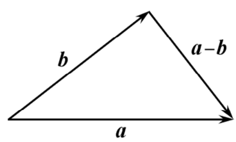

图 8.9

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

向量的线性运算满足下列运算规律：

（1）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

（3）$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

（4）$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

（5）$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

（6）$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$；

（7）$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

（8）$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

8.1.3　向量的坐标表示

1. 向径及其坐标表示

径在空间直角坐标系中，起点在原点 O，终点为 P 的向量$\overrightarrow{OP}$，称为点 P 的向径．记为$\boldsymbol{a}$ 或$\overrightarrow{OP}$（见图 8.10）.

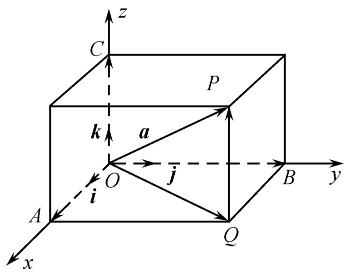

图 8.10

沿 x 轴、y 轴、z 轴正向分别取单位向量，分别记为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称为基本单位向量.

设向量$\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O，终点为$P(x,y,z)$．过 $\boldsymbol{a}$ 的终点$P(x,y,z)$分别作垂直于三条坐标轴的平面，设垂足依次为A,B,C（见图 8.10），则点 A 在 x 轴上的坐标为 x，根据数与向量的乘法，有$\overrightarrow{OA}=x\,\boldsymbol{i}$，同理$\overrightarrow{OB}=y\,\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OC}=z\,\boldsymbol{k}$，于是，由向量的加法，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称上式为向量$\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，记作$\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$．其中 x,y,z 称为向量$\boldsymbol{a}$ 的坐标.

2. 向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式

设两点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$，由图 8.11 可知，以M_1为起点，M_2为终点的向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}&=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

称上式为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

数组(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标，记为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}=\{a_x,a_y,a_z\}.$$

或称a_x,a_y,a_z分别为向量$\boldsymbol{a}$ 在 x,y,z 轴上的投影.

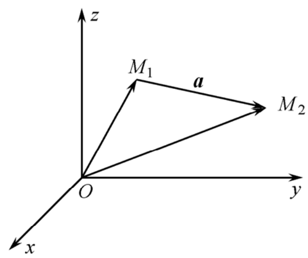

图 8.11

3. 向量的模与方向余弦的坐标表示式

若非零向量 $\boldsymbol{a}$（即向量$\overrightarrow{OA}$）与三个坐标轴正向间的夹角分别为α,β,γ，且规定

$$0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant \pi,$$

则称α,β和γ为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角（见图 8.12），并称方向角的余弦$\cos\ \alpha,\cos\ \beta$与$\cos\ \gamma$为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

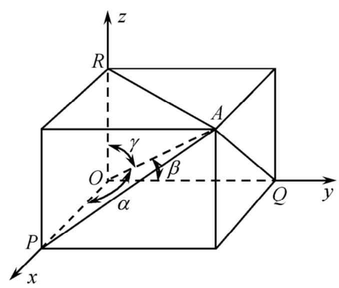

图 8.12

因为$\triangle OPA$，$\triangle OQA$，$\triangle ORA$都是直角三角形，所以

$$\cos\ \alpha = \frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\ \beta = \frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\ \gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

显然

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \left\{\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\} = \{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\},$$

即非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的坐标.

4. 向量线性运算的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\{a_x,a_y,a_z\}$， $\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$，则

（1）$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$

$=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}$

$=\left\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\right\}$；

（2）$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$ （λ 为实数）

$=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$.

例 1 已知 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角和单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{1-2,3-2,0-\sqrt{2}\right\}=\left\{-1,1,-\sqrt{2}\right\}$，

模 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$，

方向余弦 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\ \cos\beta=\dfrac{1}{2},\ \cos\gamma=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

方向角 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\ \beta=\dfrac{\pi}{3},\ \gamma=\dfrac{3\pi}{4}$，

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的单位向量 $\overrightarrow{M_1M_2^{\circ}}=\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

例 2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\ \cos\beta=\dfrac{2}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}|=6$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ 得

$$\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\pm\frac{2}{3}.$$

所以

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=6\cdot\frac{1}{3}=2,$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=6\cdot\frac{2}{3}=4,$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=6\cdot\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm4,$$

即

$$\boldsymbol{a}=\left\{2,4,4\right\}\text{ 或 }\boldsymbol{a}=\left\{2,4,-4\right\}.$$

习题 8.1

1．在 x 轴上求一点 M，使它到 $A(1,-1,-2)$ 和 $B(2,1,-1)$ 的距离相等.

2．求点 $M(-1,2,3)$ 到各坐标面以及各坐标轴的距离.

3．已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,-1,m\}$ 且 $|\boldsymbol{a}|=3$，求 $\boldsymbol{a}$.

4．已知点 $A(1,-1,-2)$，$B(2,0,3)$，$C(0,1,-1)$，（1）求 $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{CA}$；（2）求向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦及单位向量.

5．一向量与 x 轴和 y 轴组成等角，与 z 轴组成的角是它们的两倍，试求该向量的方向角.

6．用向量方法证明三角形两腰中点的连线平行于第三边，并等于第三边的一半.

8.2　向量的数量积与向量积

8.2.1　向量的数量积

1．两向量的数量积

若一物体在常力 $\boldsymbol{F}$（大小与方向均不变）的作用下，由点 A 沿直线移动到点 B，位移向量 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}$（见图 8.13），则力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}}).$$

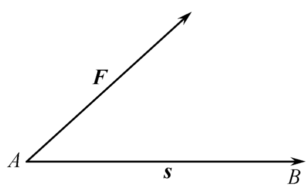

图 8.13

像这样由两个向量决定一个数量的运算，在其他领域中也会遇到.

定义 1　两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模及其夹角余弦的乘积，称为向量的数量积，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

由数量积的定义，上述作功问题可表示为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

数量积满足如下运算规律：

（1）交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$　（其中 λ 为常数）；

（3）分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

由数量积的定义可知：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}})=|\boldsymbol{a}|^2$，所以，

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1;$$

（2）设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，由定义 1，有 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由此结论可得：$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

2. 数量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\end{aligned}\tag{8.2.1}$$

即两向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

3. 两非零向量夹角余弦的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ 均为非零向量，由两向量的数量积定义可知

$$\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

例 1 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\{1,1,0\}\cdot\{1,0,1\}=1$，

$$\cos\,(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}.$$

例 2 设力 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 作用在一质点上，质点由 $A(1,2,-1)$ 沿直线移动到 $B(3,1,2)$. 求：（1）力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功；（2）力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角（力的单位为 N，位移的单位为 m）.

解 因为 $\overrightarrow{AB}=\{2,-1,3\}$，$\boldsymbol{F}=\{2,-3,4\}$，所以，力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}=2\cdot2+(-3)\cdot(-1)+4\cdot3=19\ \text{（J）},$$

又因为

$$\cos\,(\widehat{\boldsymbol{F},\overrightarrow{AB}})=\frac{\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\boldsymbol{F}||\overrightarrow{AB}|}=\frac{19}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}\approx0.9492,$$

所以 $(\widehat{\boldsymbol{F},\overrightarrow{AB}})\approx19°27'$.

例 3　求在 xOy 坐标面上与向量 $\boldsymbol{a}=-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

解　设所求向量为 $\boldsymbol{b}=\{x,y,z\}$，因为它在 xOy 坐标面上，所以 $z=0$，又因为 $\boldsymbol{b}$ 是单位向量且与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，所以 $|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

即

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \\ -4x+3y+7z=0, \end{cases}$$

解之得　$x=\pm\dfrac{3}{5}$，$y=\pm\dfrac{4}{5}$，$z=0$，

故所求向量　$\boldsymbol{b}=\dfrac{3}{5}\boldsymbol{i}+\dfrac{4}{5}\boldsymbol{j}$，或 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{3}{5}\boldsymbol{i}-\dfrac{4}{5}\boldsymbol{j}$.

8.2.2　两向量的向量积

1．向量积的概念

前面讨论了两向量的一种乘法运算——数量积，运算结果是一个数．在实际问题中，还会遇到两向量的另外一种乘法运算——向量积，运算的结果是一个新的向量.

定义 2　两向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的向量积定义为

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\ \widehat{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}\ \boldsymbol{n}^{\circ},$$

记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量，其方向按从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的夹角转到 $\boldsymbol{b}$ 的右手规则确定（见图 8.14）.

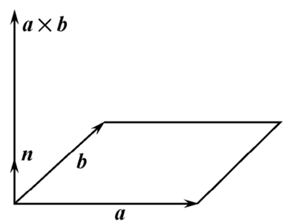

图 8.14

由向量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的模等于以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

向量积满足下列运算规律：

（1）反交换律：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

（2）结合律：$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$（其中 λ 为常数）；

（3）分配律：$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$；

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

由向量积的定义可知：

（1）两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．这是因为当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0,\ |\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\widehat{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}=0$ 等价于 $\widehat{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}=0$ 或 π.

由此可知：

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.$$

（2）$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$， $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$.

2. 向量积的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，

$\boldsymbol{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_yb_z\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

为了便于记忆，将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 用行列式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}. \tag{8.2.2}$$

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，由定义 2 和（8.2.2）式可得

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \tag{8.2.3}$$

注意：若（8.2.3）式中某一分式中分母为零，约定其分子也为零.

例 4 设 $\boldsymbol{a}=\{1,0,-2\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,2,3\}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解 由公式（8.2.2）有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-2\\1&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2\\2&3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}1&-2\\1&3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 5 求垂直于 $\boldsymbol{a}=\{1,-1,2\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{2,-2,2\}$ 的单位向量.

解 因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同时垂直 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&2\\2&-2&2\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2},$$

所求的单位向量有两个，分别为

$$\pm(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^\circ=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\{2,2,0\}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\{1,1,0\}.$$

例 6 已知三角形 ABC 的顶点是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求三角形的面积.

解 根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\ (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$$
$$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

由于 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$， $\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，因此

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\ 4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}\ \right|$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

习题 8.2

1．已知 $\boldsymbol{a}=\{4,-2,4\}$， $\boldsymbol{b}=\{6,-3,2\}$，求（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;（3）$(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$；（4）$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$；（5）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

2．判断下列各组向量是否平行或垂直.

（1）$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$， $\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$；

（2）$\boldsymbol{a}=\{2,0,-3\}$， $\boldsymbol{b}=\{3,1,2\}$；

（3）$\boldsymbol{a}=\{2,0,-3\}$， $\boldsymbol{b}=\{-2,0,3\}$.

3．已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

4．已知 $\boldsymbol{a}=\{2,4,-1\}$， $\boldsymbol{b}=\{0,-2,2\}$，求同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量.

5．求以 $A(1,2,3)$， $B(3,2,1)$， $C(-1,-2,0)$ 为顶点的三角形的面积.

6．设 $\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，使一质点沿直线从点 $M_1(0,1,-1)$ 移动到点 $M_2(2,1,-1)$，求力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.

8.3　平面及其方程

8.3.1　平面的点法式方程

与平面垂直的非零向量称为该平面的法向量，记为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$. 显然，平面的法向量有无穷多个.

已知平面 Π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，它的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$，求平面 Π 的方程（见图 8.15）.

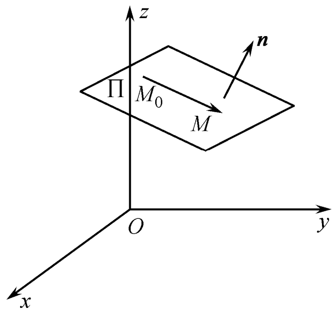

图 8.15

设点$M(x,y,z)$是空间上任意一点，则点M在平面$\prod$上的充要条件是

$$\overrightarrow{M_0M} \perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \boldsymbol{n} = 0 .$$

因为　$\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0, y-y_0, z-z_0\}$，$\boldsymbol{n} = \{A,B,C\}$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 , \tag{8.3.1}$$

则方程（8.3.1）称为平面$\prod$的点法式方程.

例 1　求过点$(2,1,1)$且垂直于向量$\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$的平面方程.

解　取　$\boldsymbol{n}=\{1,2,3\}$，由公式（8.3.1）即得平面方程为

$$(x-2)+2(y-1)+3(z-1)=0 ,$$

即　$x+2y+3z-7=0$.

例 2　求过点$M_1(1,2,-1)$和$M_2(2,3,1)$且和平面$x-y+z+1=0$垂直的平面方程.

解　因为$\overrightarrow{M_1M_2}=\{1,1,2\}$在该平面上，已知平面的法向量$\boldsymbol{n}_1=\{1,-1,1\}$，所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$和$\boldsymbol{n}_1$都垂直，故

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k} ,$$

由公式（8.3.1）得该平面的方程为

$$3(x-1)+(y-2)-2(z+1)=0 ,$$

即$3x+y-2z-7=0$.

例 3　求过点$M_1(1,1,1), M_2(-1,5,2)$和$M_3(2,-2,1)$三点的平面方程.

解　所求平面的法向量$\boldsymbol{n}$与向量$\overrightarrow{M_1M_2}$和$\overrightarrow{M_1M_3}$都垂直，而

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-2,4,1\},\ \overrightarrow{M_1M_3}=\{1,-3,0\} ,$$

故　$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}=\{3,1,2\} ,$$

由公式（8.3.1）得该平面方程为$3(x-1)+(y-1)+2(z-1)=0$，

即　$3x+y+2z-6=0$．

8.3.2　平面的一般式方程

将公式（8.3.1）展开，得

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

这是 x,y,z 的一次方程，所以平面可用 x,y,z 的一次方程来表示．反之，任意的 x,y,z 的一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{8.3.2}$$

是否都表示平面呢（式中 A,B,C 不全为零）？方程（8.3.2）是一个含有三个未知数的方程，所以有无穷多组解，设 x_0,y_0,z_0 是其中一组解，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{8.3.3}$$

方程（8.3.2）减方程（8.3.3），得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

这就是方程（8.3.1），它表示过点 (x_0,y_0,z_0)，且以 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 为法向量的平面．由此可知 x,y,z 的一次方程（8.3.2）都表示平面，x,y,z 前的系数 A,B,C 为平面法向量的坐标．方程（8.3.2）称为平面的一般式方程．

下面讨论方程（8.3.2）的一些特殊情况：

（1）当 $D=0$ 时，方程（8.3.2）变成为 $Ax+By+Cz=0$，显然，平面通过原点（见图 8.16）；

（2）当 $A=0$ 时，方程（8.3.2）成为 $By+Cz+D=0$，法向量 $\boldsymbol{n}=\{0,B,C\}$，与 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$ 垂直，所以该平面平行于 x 轴（见图 8.17）；

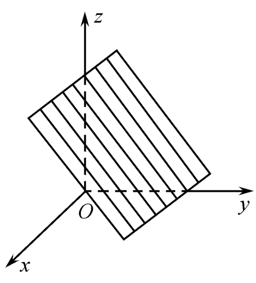

图 8.16

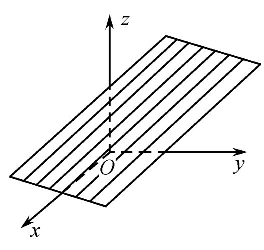

图 8.17

（3）当 $A=D=0$ 时，方程（8.3.2）成为 $By+Cz=0$，它所表示的平面通过 x 轴（见图 8.18）．

同理，方程 $Ax+Cz+D=0$，$Ax+By+D=0$，分别表示平行于 y 轴和 z 轴的平面；$Ax+Cz=0$，$Ax+By=0$ 分别表示通过 y 轴和 z 轴的平面．

（4）当 $A=B=0$ 时，方程（8.3.2）成为 $Cz+D=0$，法向量 $\boldsymbol{n}=\{0,0,C\}$ 与 $\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$ 平行，所以该平面平行于 xOy 坐标面（见图 8.19），当 $A=B=D=0$ 时，方程为 $z=0$，它表示 xOy 坐标面.

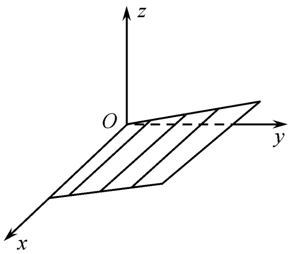

图 8.18

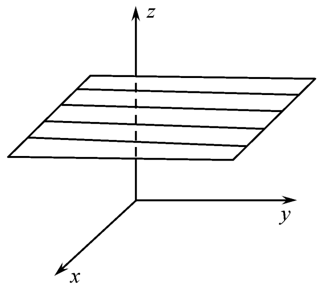

图 8.19

同理，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示平行 yOz 坐标面和 zOx 坐标面的平面；方程 $x=0$ 和 $y=0$ 分别表示 yOz 坐标面和 zOx 坐标面.

例 4　求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面方程.

解　因平面通过 x 轴，由以上讨论，可设其方程为 $By+Cz=0$，又点 $(4,-3,-1)$ 在平面上，因此 $-3B-C=0$，即 $C=-3B$，代入原方程并化简，得所求平面方程为 $y-3z=0$.

例 5　一平面经过 $P(1,1,1)$, $Q(-2,1,2)$, $R(-3,3,1)$ 三点，求此平面的方程.

解　设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

又因 P,Q,R 三点都在平面上，所以有

$$\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ -2A+B+2C+D=0, \\ -3A+3B+C+D=0, \end{cases}$$

后两个方程分别减去第一个方程，得

$$\begin{cases} -3A+C=0, \\ -4A+2B=0, \end{cases}$$

所以　$C=3A$，$B=2A$.

代入第一个方程得

$$A+2A+3A+D=0,$$

即　$D=-6A$.

因为 A,B,C 不能同时为零，所以 $A\neq 0$，于是有

$$Ax+2Ay+3Az-6A=0,$$

即得所求平面方程为

$$x+2y+3z-6=0.$$

8.3.3 平面的截距式方程

设一平面过三点 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$（见图 8.20），求此平面方程.

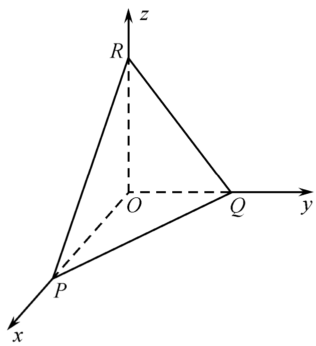

图 8.20

设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为 P,Q,R 三点在该平面上，所以有

$$\begin{cases} Aa+D=0, \\ Bb+D=0, \\ Cc+D=0. \end{cases}$$

解此方程组得

$$A=-\frac{D}{a},\ B=-\frac{D}{b},\ C=-\frac{D}{c}.$$

代入所设方程（因平面不过原点，所以 $D\neq 0$）得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

即得所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (8.3.4)$$

方程中的 a,b,c 分别称为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距，方程（8.3.4）称为平面的截距式方程.

例 6 将平面方程 $3x-4y+z-5=0$ 化为截距式方程.

解 由 $3x-4y+z-5=0$，得 $3x-4y+z=5$.

方程两边同除以 5，得平面的截距式方程为

$$\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}+\frac{z}{5}=1.$$

其中 $a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{5}{4}$, $c=5$.

习题 8.3

1．指出下列各平面的特殊位置，并画出各平面.

（1） $x=0$ ；（2） $3y=1$ ；

（3） $2x+3y-6=0$ ；（4） $x-\sqrt{3}y=0$ ；

（5） $6x+5y-z=0$.

2．求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-6=0$ 平行的平面方程.

3．求过三点 $(1,-1,2)$ ， $(-2,-2,2)$ ， $(1,1,-1)$ 的平面方程.

4．一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ ，试求该平面方程.

5．求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

6．求过点 $(1,1,1)$ 与 $(2,2,2)$ 且与平面 $x+y-z=0$ 垂直的平面方程.

7．求过点 $(5,1,7)$ 与 $(4,0,-2)$ 且平行于 z 轴的平面方程.

8.4 空间直线及其方程

8.4.1 直线的一般式方程

空间直线可看作两个平面的交线，设平面 $\prod_1,\prod_2$ 的方程分别为

$$\prod_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\prod_2: \quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则两个平面 $\prod_1,\prod_2$ 的交线 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

方程（8.4.1）称为直线的一般式方程.

8.4.2 直线的点向式方程与参数方程

与直线平行的非零向量称为该直线的方向向量，记为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ ，显然，直线的方向向量有无穷多个.

已知直线 l 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ，它的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ ，求直线 l 的方程（见图 8.21）.

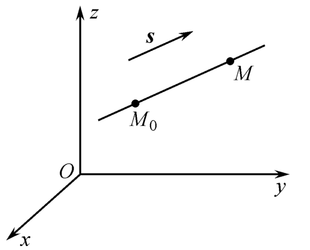

图 8.21

设点 $M(x,y,z)$ 为空间上任意一点，则点 M 在直线 l 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \boldsymbol{s}$.

因为 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$， $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，所以由两向量平行的充要条件可知

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (8.4.2)$$

方程组（8.4.2）称为直线的点向式方程（或称标准方程）.

注意：当 m,n,p 中有一个或两个为零时，就理解为相应的分子也为零.

在直线方程（8.4.2）中，记其比值为 t，则有

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (8.4.3)$$

式（8.4.3）称为直线 l 的参数方程，t 为参数.

例 1　求过点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的直线方程.

解　取 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 作为直线的方向向量，即 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，故所求直线的方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

上式也称为直线的两点式方程.

例 2　求过点 $(1,-3,2)$ 且平行于两平面 $3x-y+5z+2=0$ 及 $x+2y-3z+4=0$ 的直线方程.

解　因为所求直线平行于两平面. 故直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 垂直于两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{3,-1,5\}$ 及 $\boldsymbol{n}_2=\{1,2,-3\}$，所以取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k},$$

因此，所求直线方程为 $$\frac{x-1}{-7}=\frac{y+3}{14}=\frac{z-2}{7},$$

即 $$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

例 3 求过点 $M(1,1,1)$ 且与直线 l: $\begin{cases}x-2y+z=0,\\2x+2y+3z-6=0\end{cases}$ 平行的直线方程.

解 两平面 $x-2y+z=0$, $2x+2y+3z-6=0$ 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{1,-2,1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2,2,3\}$.

因为两平面的交线 l 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 都垂直，所以

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&1\\2&2&3\end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

因此，所求直线的方程为 $\dfrac{x-1}{-8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{6}$.

例 4 将直线方程 $\begin{cases}x+y+z+2=0,\\2x-y+3z+4=0\end{cases}$ 化为点向式方程及参数方程.

解 先求直线上的一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，不妨令 $z=0$，代入原方程组，得

$$\begin{cases}x+y+2=0,\\2x-y+4=0.\end{cases}$$

解之，得 $x=-2,\quad y=0$，即点 $(-2,0,0)$ 在直线上.

再求该直线的一个方向向量 $\boldsymbol{s}$，因为 $\boldsymbol{s}$ 分别垂直于平面 $x+y+z+2=0$ 及 $2x-y+3z+4=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{1,1,1\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2,-1,3\}$，所以可取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}.$$

所以该直线的点向式方程为

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}.$$

令上式为 t，可得已知直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=-2+4t,\\y=-t,\\z=-3t.\end{cases}$$

8.4.3　平面、直线的位置关系

1. 平面与平面的位置关系

两平面法向量的夹角，称为两平面的夹角（取锐角）（见图 8.22）.

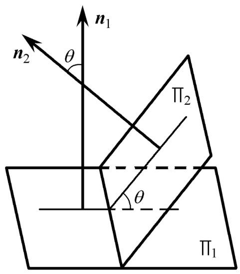

图 8.22

设两平面Π_1,Π_2的方程分别为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\text{，}\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\text{，}$$

它们的法向量分别为

$$\boldsymbol{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}\text{，}\quad \boldsymbol{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}\text{，}$$

因此Π_1与Π_2的夹角的余弦为

$$\cos\ \theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{8.4.4}$$

特别地，

$$\Pi_1 /\!/ \Pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\text{；}$$

$$\Pi_1\perp\Pi_2\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

例 5　求两平面$x-y+2z-6=0,\quad 2x+y+z-5=0$的夹角.

解　因两平面的法向量分别为$\boldsymbol{n}_1=\{1,-1,2\}$，$\boldsymbol{n}_2=\{2,1,1\}$，则两平面的夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\ \theta=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}\text{，}$$

所以两平面的夹角$\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 直线与直线的位置关系

两直线的方向向量的夹角称为两直线的夹角（取锐角）.

设两直线l_1和l_2的方程分别为

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1},$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

它们的方向向量分别为

$$\boldsymbol{s}_1=\{m_1,n_1,p_1\},\quad \boldsymbol{s}_2=\{m_2,n_2,p_2\},$$

因此l_1与l_2的夹角的余弦为

$$\cos\ \theta=\frac{\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{8.4.5}$$

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 /\!/ \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2};$$

$$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

例 6　求直线l_1: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$和直线$l_2$: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$的夹角.

解　因l_1, l_2的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=\{1,-4,1\}$，$\boldsymbol{s}_2=\{2,-2,-1\}$，则两直线$l_1$与$l_2$的夹角$\theta$的余弦为

$$\cos\ \theta=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以两直线的夹角$\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

3. 直线与平面的位置关系

直线和它在平面上的投影直线的夹角称为直线与平面的夹角（取锐角）.

设直线l与平面$\prod$的垂线的夹角为θ，l与$\prod$的夹角为α，则$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$. 求直线与平面的夹角，就转化为求直线与直线的夹角.

因为平面的法向量是平面垂线的方向向量，所以先按公式（8.3.9）求出直线与平面垂线的夹角θ，那么直线l与平面$\prod$的夹角$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$也就随之而得.

设$\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$，$\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$分别是直线l的方向向量和平面$\prod$的法向量，由两向量夹角的余弦公式，有

$$\sin\ \alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\ \theta=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}$$

$$=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

$$l /\!/ \prod \Leftrightarrow \boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n} \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0;$$

$$l \perp \prod \Leftrightarrow \boldsymbol{s} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

例 7 已知直线 l：$\begin{cases} x+y-5=0, \\ 2x-z+8=0 \end{cases}$ 和平面$\prod$：$2x+y+z-3=0$，求 l 与$\prod$的夹角.

解 先求出 l 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\{1,1,0\}\times\{2,0,-1\}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

l 与$\prod$的垂线的夹角θ的余弦为

$$\cos\ \theta=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{|(-1)\times 2+1\times 1+(-2)\times 1|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

$$\theta=\arccos\ \frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

因此，l 与$\prod$的夹角$\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$.

8.4.4 综合举例

例 8 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程.

解法一 因为所求直线与两平面的交线平行, 所以直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 一定与两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1$, $\boldsymbol{n}_2$ 垂直, 所以可以取

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\{1,0,-4\}\times\{2,-1,-5\}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

因此所求直线的方程为

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

解法二 过点 $(-3,2,5)$ 且与平面 $x-4z=3$ 平行的平面的方程为

$$x-4z=-23.$$

过点 $(-3,2,5)$ 且与平面 $2x-y-5z=1$ 平行的平面的方程为

$$2x-y-5z=-33.$$

因此所求直线方程为上面两个平面的交线，其方程为

$$\begin{cases} x-4z=-23, \\ 2x-y-5z=-33. \end{cases}$$

例 9 求直线 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z=6$ 的交点.

解 所给直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=3+t, \\ z=4+2t, \end{cases}$$

将其代入方程中，得

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)=6,$$

解出 $t=-1$，代入直线的参数方程中，得到所求交点的坐标为

$$(x,y,z)=(1,2,2).$$

例 10 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

解 先求过点 $(2,1,3)$ 且和已知直线垂直的平面方程，直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 看作是平面的法向量，这个平面方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0.$$

再求已知直线与这个平面的交点，直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=1+2t, \\ z=-t, \end{cases}$$

将上式代入平面方程中，解得 $t=\dfrac{3}{7}$，从而所求交点坐标为 $\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$，则以 $(2,1,3)$ 为起点，$\left(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7}\right)$ 为终点的向量为

$$\left(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3\right)=-\frac{6}{7}(2,-1,4),$$

是所求直线的一个方向向量，故所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

习题 8.4

1．求平面 $2x-y+z-7=0$ 和平面 $x+y+2z-11=0$ 的夹角.

2．求过点 $(1,1,1)$ 且同时平行于平面 $x+y-2z+1=0$ 和 $x+2y-z+5=0$ 的直线方程.

3．求通过点 $(-1,2,3)$ 且平行于直线 $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$ 的直线方程.

4．求过点$(2,-3,4)$且垂直于平面$3x-y+2z=4$的直线方程.

5．求直线l_1：$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-2}{-12}=\dfrac{z+1}{3}$和直线$l_2$：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$的夹角.

6．求直线$\begin{cases}x+y+3z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$和平面$x-y-z+1=0$的夹角.

7．试确定下列各题中直线与平面间的关系.

（1）$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$和$4x-2y-2z-3=0$；

（2）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$和$3x-2y+7z-8=0$；

（3）$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$和$x+y+z-3=0$.

8.5 曲面及其方程

8.5.1 曲面方程的概念

定义 曲面S和三元方程$F(x,y,z)=0$满足：

（1）曲面S上的任意一点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$；

（2）不在曲面S上的点的坐标都不满足方程$F(x,y,z)=0$.

那么称方程$F(x,y,z)=0$为曲面S的方程，曲面S称为方程$F(x,y,z)=0$的图形（见图8.23）.

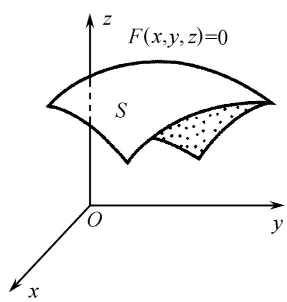

图8.23

我们知道平面方程是关于x,y,z的三元一次方程，所以平面是曲面的特殊情形，本节将讨论一些常见的含x,y,z的二次方程所表示的曲面，称之为二次曲面.

8.5.2 球面

建立以$M_0(x_0,y_0,z_0)$为球心，R为半径的球面方程.

设 $M(x,y,z)$ 是球面上任意一点（见图 8.24），则有 $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = R$ ，而

$$\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} ,$$

所以
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 .$$

这就是以点 (x_0,y_0,z_0) 为球心，R 为半径的球面方程.

当 $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ 时，得球心在原点，半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 .$$

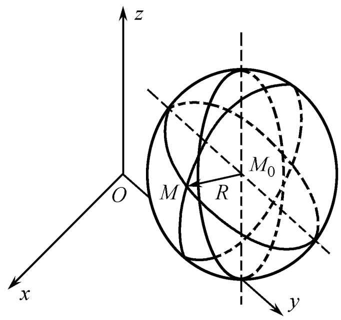

图 8.24

例 1　方程 $2x^2+2y^2+2z^2+2x-2z-1=0$ 表示怎样的曲面？

解　原方程两边同除以 2 并将常数项移到等号右端，得

$$x^2+y^2+z^2+x-z=\frac{1}{2} .$$

配方得
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 ,$$

所以，原方程表示球心在$\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，半径为 1 的球面.

8.5.3　柱面

动直线 l 沿给定曲线 C 平行移动所形成的曲面，称为柱面．动直线 l 称为柱面的母线，定曲线 C 称为柱面的准线（见图 8.25）.

我们只讨论准线在坐标面内，母线平行于坐标轴的柱面．以建立在 xOy 面上的曲线 C ： $f(x,y)=0$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

设 $M(x,y,z)$ 是柱面上的任意一点，过点 M 的母线与 xOy 面的交点 N 一定在准线 C 上（见图 8.26），点 N 的坐标为 $(x,y,0)$ ；不论点 M 的竖坐标 z 取何值，它的横坐标 x 和纵坐标 y 都满足方程 $f(x,y)=0$ ，因此，所求柱面方程为

$$f(x,y)=0 .$$

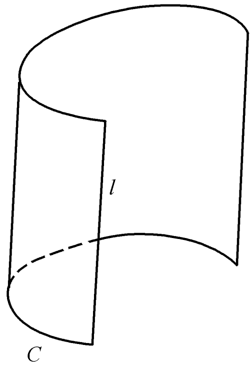

图 8.25

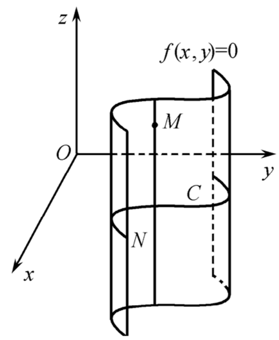

图 8.26

在平面直角坐标系中，方程 $f(x,y)=0$ 表示一条平面曲线，在空间直角坐标系中，方程 $f(x,y)=0$ 表示以 xOy 面上的曲线 C：$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面.

类似地，方程 $h(y,z)=0$ 表示以 yOz 面上的曲线 C'：$\begin{cases} h(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 x 轴的柱面.

方程 $g(x,z)=0$ 表示以 xOz 面上的曲线 C''：$\begin{cases} g(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面.

例 2　试说明下列方程表示什么曲面.

（1）$x^2+y^2=R^2$；（2）$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$；（3）$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；（4）$x^2=2py$（$p>0$）.

解（1）方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示以 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 为准线，母线平行于 z 轴的圆柱面（见图 8.27）.

（2）方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示以 xOy 面上的椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为准线，母线平行于 z 轴的椭圆柱面（见图 8.28）.

（3）方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 表示以 xOy 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 为准线，母线平行于 z 轴的双曲柱面（见图 8.29）.

（4）方程 $x^2=2py$（$p>0$）表示以 xOy 面上的抛物线 $x^2=2py$ 为准线，母线平行于 z 轴的抛物柱面（见图 8.30）.

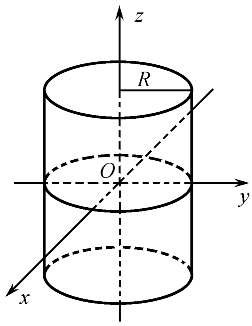

图 8.27

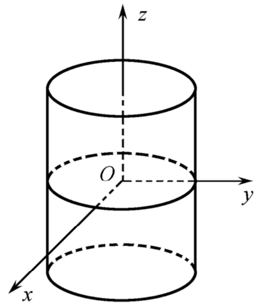

图 8.28

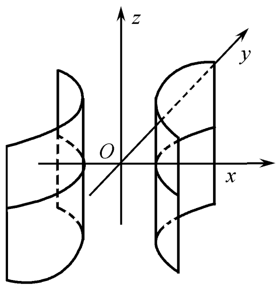

图 8.29

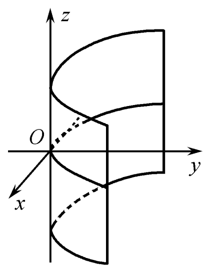

图 8.30

由于这四个方程都是二次方程，因此统称为二次柱面.

8.5.4 旋转曲面

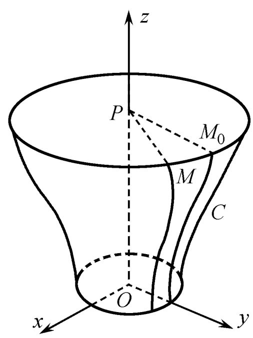

图 8.31

旋转曲面的方程

平面曲线 C 绕同一平面上定直线 l 旋转一周所形成的曲面，称为旋转曲面．定直线 l 称为旋转轴.

建立 yOz 面上一条曲线 C：$f(y,z)=0$，求绕 z 轴旋转一周所形成的旋转曲面的方程（见图 8.31）.

设 $M(x,y,z)$ 为旋转曲面上任一点，过点 M 作平面垂直于 z 轴，交 z 轴于点 $P(0,0,z)$，交曲线 C 于点 $M_0(0,y_0,z_0)$，由于点 M 可以由点 M_0 绕 z 轴旋转得到，因此有

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\left|\overrightarrow{PM_0}\right|,\quad z=z_0. \tag{8.5.1}$$

因为 $\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$，$\left|\overrightarrow{PM_0}\right|=|y_0|$，所以

$$y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}. \tag{8.5.2}$$

又因为M_0在曲线C上，所以

$$f(y_0, z_0) = 0 .$$

将（8.5.1）、（8.5.2）代入上式，即得旋转曲面方程为

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0 .$$

可见，求平面曲线$f(y,z)=0$绕z轴旋转的旋转曲面方程，只要将$f(y,z)=0$中的y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$而z保持不变，即得旋转曲面方程.

同理，曲线$\begin{cases} f(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转的旋转曲面方程为

$$f\left(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0 .$$

例 3　将yOz坐标面上的直线$z=ay$（$a \neq 0$）绕z轴旋转一周，试求所得旋转曲面方程.

解　因为是yOz坐标面上的直线$z=ay$（$a \neq 0$）绕z轴旋转，故将z保持不变，y换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，则得

$$z = a\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

即所求旋转曲面方程为$z^2 = a^2(x^2+y^2)$.

由上式表示的曲面称为圆锥面，点O称为圆锥的顶点（见图 8.32）.

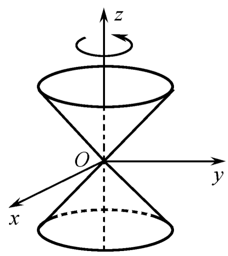

图 8.32

8.5.5　几种常见的二次曲面

在空间直角坐标系中，方程$F(x,y,z)=0$一般表示曲面；若$F(x,y,z)=0$为一次方程，则它的图形是一个平面，称为一次曲面；若$F(x,y,z)=0$为二次方程，则它的图形称为二次曲面.

再给出几个常见的二次曲面的方程，并用“截痕法”来研究这些特殊的二次曲面方程，即用坐标面和平行于各坐标面的平面去截曲面，得到一系列的交线，对这些交线进行分析、综合，从而看出曲面的形状.

1. 椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)\tag{8.5.3}$$

所表示的曲面称为椭球面.

从方程（8.5.3）可知：

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\quad \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1,$$

即 $|x|\leqslant a$，$|y|\leqslant b$，$|z|\leqslant c$.

这说明由方程（8.5.3）所表示的椭球面上的所有点都在由六个平面 $x=\pm a,$ $y=\pm b,$ $z=\pm c$ 所围成的长方体内，a,b,c 称为椭球面的半轴.

用三个坐标面分别去截椭球面，交线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

显然，这些交线都是椭圆.

再用平行于 xOy 面的平面 $z=h$（$|h|<c$）截椭球面，交线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases}$$

是平面 $z=h$ 上的椭圆.

当 z 变化时，这些椭圆中心均在 z 轴上，当 $|h|$ 由 0 逐渐增大到 c 时，椭球截面由大到小，最后缩成一点.

用平行其他两个坐标面的平面去截椭球面，分析的结果类似.

综上所述，可得椭球面的形状如图 8.33 所示.

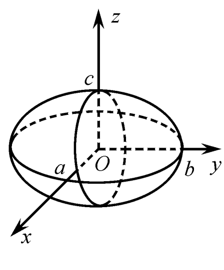

图 8.33

在椭球面方程（8.5.3）中，若半轴 a,b,c 有两个相等. 例如 $a=b$，则方程化为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. 它是 yOz 坐标面上的椭圆曲线 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面. 又若 $a=b=c=R$，则方程化为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，它是球心在原点、半径为 R 的球面.

2. 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\tag{8.5.4}$$

所表示的曲面称为单叶双曲面.

这个单叶双曲面关于三个坐标面、三个坐标轴以及原点均对称.

用三个坐标面截曲面，所得截线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0;\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

它们分别表示 xOy 面上的椭圆、 yOz 面上以 y 轴为实轴的双曲线和 zOx 面上以 x 轴为实轴的双曲线.

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 截曲面，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},$$

其截痕都是中心在 z 轴上的椭圆.

用 zOx 面和 yOz 面去截曲面，其截痕为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{cases}$$

它们都是双曲线.

单叶双曲面（中心轴为 z 轴）的图形如图 8.34 所示.

同理，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\text{ 和 }-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示的曲面也都是单叶双曲面，中心轴分别为 y 轴和 x 轴.

3. 双叶双曲面

方程
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{8.5.5}$$

所表示的曲面称为双叶双曲面.

这个双叶双曲面关于三个坐标平面、三个坐标轴以及原点也都对称.

用 yOz 和 zOx 面截曲面，所得截线分别为

$$\begin{cases}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

它们都是以 z 轴为实轴，虚轴分别为 y 轴和 x 轴的双曲线.

由方程（8.5.5）知 $|z|\geqslant c>0$ ，故双叶双曲面与 xOy 面不相交.

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$ 截曲面，得 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1$.

当 $|h|>c$ 时，其截痕是一椭圆；

当 $|h|=c$ 时，其截痕缩为一点 $(0,0,c)$ 和 $(0,0,-c)$；

当 $|h|<c$ 时，没有图形.

双叶双曲面的形状如图 8.35 所示.

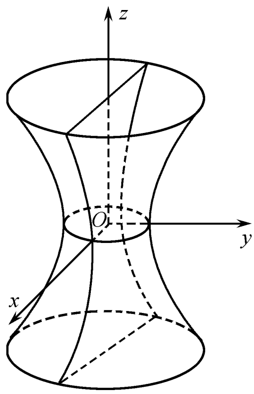

图 8.34

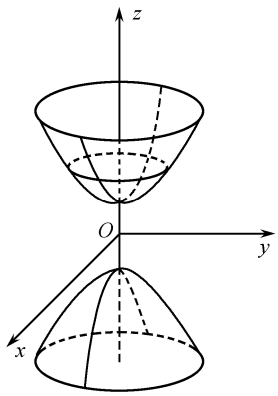

图 8.35

方程 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 和 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ 所表示的曲面也都是双叶双曲面.

4. 椭圆抛物面

方程

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \tag{8.5.6}$$

所表示的曲面称为椭圆抛物面.

这个椭圆抛物面过原点，且关于 yOz，zOx 面以及 z 轴均对称.

用 yOz 和 zOx 面截曲面，所得截线分别为

$$\begin{cases} z=\dfrac{y^2}{b^2}, \\ x=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}, \\ y=0. \end{cases}$$

它们都是开口向上的抛物线.

用平面 $z=h$ 截曲面，得

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=h, \\ z=h. \end{cases}$$

当 $h<0$ 时，平面 $z=h$ 与这个曲面不相交，所以没有图形；

当 $h=0$ 时，相交于一点 $(0,0,0)$；

当 $h>0$ 时，所得截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2h}+\dfrac{y^2}{b^2h}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

这是平面 $z=h$ 中心在 z 轴上的椭圆．当 h 由 0 逐渐增大趋于 $+\infty$ 时，椭圆的两个半轴 $a\sqrt{h}$ 和 $b\sqrt{h}$ 也随之由 0 而逐渐增大趋于 $+\infty$．

椭圆抛物面的形状如图 8.36 所示．

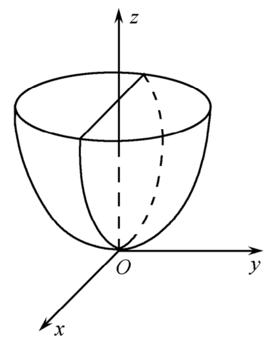

图 8.36

5．*双曲抛物面*

方程
$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\tag{8.5.7}$$
所表示的曲面称为双曲抛物面（或马鞍面）．

这个双曲抛物面过原点，且关于 yOz 和 zOx 面以及 z 轴均对称．

用三个坐标面截曲面，所得截线分别为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,\\ z=0;\end{cases}\quad \begin{cases}z=\dfrac{x^2}{a^2},\\ y=0;\end{cases}\quad \begin{cases}z=-\dfrac{y^2}{b^2},\\ x=0.\end{cases}$$

它们分别表示两条相交直线、开口向上的抛物线和开口向下的抛物线．

用平行于 xOy 面的平面 $z=h$（$h\neq 0$）截曲面，所得截线为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=h,\\ z=h.\end{cases}$$

它是在平面 $z=h$ 上的双曲线．

当 $h<0$ 时，双曲线的实轴平行于 y 轴；

当 $h>0$ 时，双曲线的实轴平行于 x 轴.

用平行于 yOz 和 zOx 面的平面 $x=h$ 和 $y=h$ 截曲面，所得截线分别为

$$\begin{cases} z=-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{h^2}{a^2}, \\ x=h \end{cases} \text{和} \begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{h^2}{b^2}, \\ y=h. \end{cases}$$

它们分别表示开口向下、开口向上的两族抛物线.

双曲抛物面的形状如图 8.37 所示．由于它形如马鞍，故又称马鞍面，坐标原点称为它的鞍点.

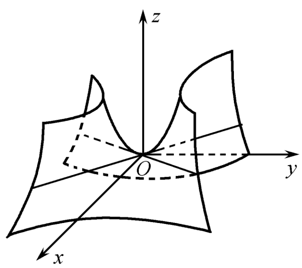

图 8.37

习题 8.5

1．分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且能过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

2．建立以点 $(1,3,-2)$ 为中心，且通过坐标原点的球面方程.

3．求下列旋转曲面方程.

（1）曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1, \\ y=0 \end{cases}$ 绕 x 轴及 z 轴旋转；

（2）曲线 $\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ 绕 x 轴及 y 轴旋转.

4．指出下列方程所表示的曲面.

（1） $x^2+y^2+4z^2-1=0$ ；

（2） $x^2+y^2-z^2-1=0$ ；

（3） $x^2-y^2-z^2-1=0$ ；

（4） $x^2+y^2-z=0$ ；

（5） $x^2-y^2-z=0$.

8.6 空间曲线

8.6.1 空间曲线的一般方程

空间曲线 Γ 可以看成是两个曲面的交线，设曲面 S_1 和 S_2 的方程分别为 $F_1(x,y,z)=0$ 和 $F_2(x,y,z)=0$，则其交线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{8.6.1}$$

方程（8.6.1）称为空间曲线的一般方程.

例 1　下列方程组表示什么曲线？

（1）$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ z=3; \end{cases}$　（2）$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}, \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2. \end{cases}$

解　（1）$x^2+y^2+z^2=25$ 是球心在原点，半径为 5 的球面. $z=3$ 是平行于 xOy 面的平面，它们的交线是在平面 $z=3$ 上的圆（见图 8.38）.

（2）方程 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示球心在坐标原点 O，半径为 a 的上半球面；方程 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$ 表示母线平行于 z 轴的圆柱面，方程组表示上半球面与圆柱面的交线（如图 8.39 所示）.

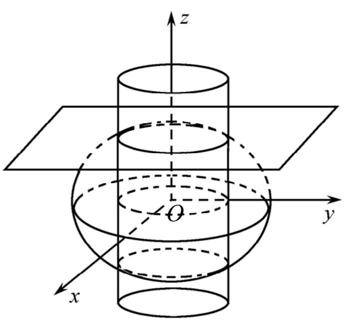

图 8.38

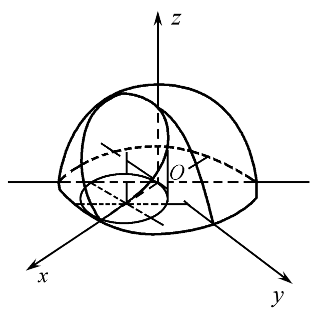

图 8.39

8.6.2 空间曲线的参数方程

空间曲线 Γ 上动点 M 的坐标 x,y,z 分别表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (8.6.2)$$

方程组（8.6.2）称为曲线 Γ 的参数方程，t 为参数.

例 2 设空间一动点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω，v 都是常数），则动点 M 的轨迹叫做螺旋线，试求其参数方程.

解 取时间 t 为参数，设 $t = 0$ 时，动点在 $M_0(a,0,0)$ 处，经过时间 t，动点由 M_0 运动到 $M(x,y,z)$（见图 8.40）.

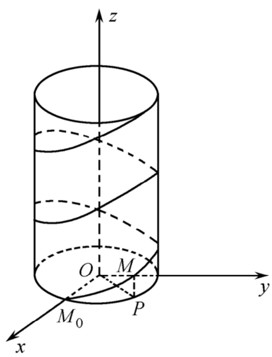

图 8.40

过 M 作 xOy 面的垂线，垂足为 $P(x,y,0)$，则从 M_0 到 M 所转过的角 $\theta = \omega t$，上升的高度 $PM = vt$，则动点的运动方程即螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t, \\ y = a\sin\omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

如果令 $\theta = \omega t$，以 θ 为参数，则螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = a\sin\theta, \\ z = b\theta, \end{cases}$$

其中 $b = \dfrac{v}{\omega}$.

这种螺旋线在机床上经常见到，当 θ 由 θ_0 增加到 $\theta_0 + 2\pi$ 时，螺旋线上升一圈，这时 z 的增量 $\Delta z = 2b\pi$，这个高度在工程上称为螺距.

8.6.3　空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{8.6.3}$$

消去 z，得 $H(x,y)=0$.

满足曲线 Γ 的方程一定满足方程 $H(x,y)=0$，而 $H(x,y)=0$ 表示一个以曲线 Γ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面，称为曲线 Γ 关于 xOy 面的投影柱面.

它与 xOy 面的交线就是空间曲线在 xOy 面上的投影曲线，简称投影，其方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

同理，从（8.6.3）中分别消去 x 和 y，得到 $R(y,z)=0$ 和 $G(x,z)=0$，则曲线 Γ 在 yOz 和 zOx 面上的投影曲线方程分别为

$$\begin{cases} R(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} G(x,z)=0, \\ y=0. \end{cases}$$

例 3　求曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

在 xOy 面上的投影曲线方程（见图 8.41）.

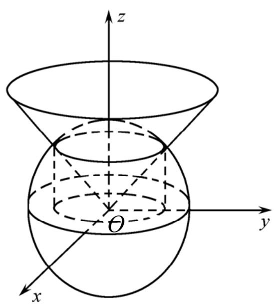

图 8.41

解　从曲线 Γ 的方程中消去 z，得

$$2(x^2+y^2)=a^2,$$

即

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}.$$

这是曲线 Γ 关于 xOy 面的投影柱面——圆柱面方程.

曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为圆曲线，方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}, \\ z=0. \end{cases}$$

习题 8.6

1．分别求出母线平行于 x 轴及 y 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16, \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$ 的柱面方程.

2．求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程.

3．曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2=y^2+z^2$ 的交线在 yOz 面上的投影方程.

4．求曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 zOx 面上的投影方程.

本章小结

1．注意空间特殊点的坐标的特征，如坐标轴和坐标面上的点，以及对称点的坐标.

2．我们所研究的向量都为自由向量，故在空间经平移后完全重合的向量是相等的.

3．平面的一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 中，某些系数为零时平面的特征，如 $B=0$，表示平行于 x 轴的平面等.

4．平面的点法式方程中法向量 $\boldsymbol{n}=\{A,B,C\}$ 的求法的各种形式和方法的掌握.

5．直线的一般式方程形式不是唯一的，注意两直线间的关系.

6. 直线的点向式方程中直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\{m,n,p\}$ 的求法的各种形式和方法的掌握.

7．掌握平面与平面、平面与直线、直线与直线的位置关系的判断.

8．注意常见的二次曲面的特征，特别是柱面、旋转曲面方程的特征.

9．注意投影曲线 $\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases}$ 与投影柱面 $F(x,y)=0$ 的区别.

复习题 8

1．求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

2．求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 垂直的单位向量.

3．求过点 $M(1,-2,3)$ 和两平面 $3x+2y+z-4=0$ 及 $x-5z-6=0$ 皆垂直的平面方程.

4．一平面通过点 $(2,1,0)$ 且与各坐标轴的截距相等，求此平面方程.

5．求平面 $2x-y+z-7=0$ 和平面 $x+y+2z-11=0$ 的夹角.

6．求过点 $A(1,1,2)$ 且平行于平面 $x+y+3z=0$ 和平面 $x-y-z=0$ 的直线方程.

7．求直线 $\begin{cases}2x-3y+z-5=0,\\3x+y-2z-4=0\end{cases}$ 的点向式及参数方程.

8．求平面 $x+y-9=0$ 与直线 $\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\x+y-z=0\end{cases}$ 间的夹角.

9．证明直线 $\begin{cases}3x+z=4,\\y+2z=9\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}6x-y=7,\\3y+6z=1\end{cases}$ 互相平行.

10．证明直线 $\begin{cases}x+2y=1,\\2y-z=1\end{cases}$ 与直线 $\begin{cases}x-y=1,\\x-2z=3\end{cases}$ 互相垂直.

11．求下列直线与平面的交点.

（1）$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6}$， $2x+3y+z-1=0$；

（2）$\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$， $x+2y-2z+6=0$.

12．试确定下列各题中直线与平面间的关系.

（1）$\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和 $4x-2y-2z-3=0$；

（2）$\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{7}$ 和 $3x-2y+7z-8=0$；

（3）$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z-3=0$.

13．求下列各曲线在 xOy 平面上投影曲线的方程.

（1）$2x^2+y^2+z^2=16$， $x^2+z^2-y^2=0$；

（2）$x^2+y^2-z=0$， $z=x+1$；

（3）$x^2+z^2+y^2=1$， $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$；

（4）$z^2=x^2+y^2$， $z^2=2y$.

14．分别写出曲面 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 在下列各平面上的截痕的方程，并指出这些截痕是什么曲线.

（1）$x=2$；　　（2）$y=0$；

（3）$y=5$；　　（4）$z=2$；

（5）$z=1$.

自测题 8

1．填空题.

（1）若两向量 $\boldsymbol{a}=\{\lambda,-3,2\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{1,2,-\lambda\}$ 互相垂直，则 $\lambda=$ ________；

（2）平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 的单位向量是________；

（3）已知向量 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$，若向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行，且 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=3$，则 $\boldsymbol{b}$=________；

（4）过点 $(1,2,1)$ 与向量 $\boldsymbol{s}_1=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ 及 $\boldsymbol{s}_2=-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 平行的平面方程是________；

（5）过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 及 $y-3z=2$ 都平行的直线是________.

2．单选题.

（1）下列等式中，正确的等式是（　　）.

A．$\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$　　B．$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$　　C．$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}$　　D．$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}$

（2）已知 $|\boldsymbol{a}|=2,\ |\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，则 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=$（　　）.

A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D．1

（3）若三个向量 $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 满足条件 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{a}|=3,\ |\boldsymbol{b}|=1,\ |\boldsymbol{c}|=4$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$（　　）.

A．19　　B．26　　C．13　　D．−13

（4）直线 $\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $4x-2y-2z=3$ 的关系是（　　）.

A．平行，但直线不在平面上　　B．直线在平面上

C．垂直相交　　D．相交但不垂直

（5）母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是（　　）.

A．椭圆柱面 $3x^2+2z^2=16$　　B．椭圆柱面 $x^2+2y^2=16$

C．双曲柱面 $3y^2-z^2=16$　　D．抛物柱面 $3y^2-z=16$

3．计算题.

（1）求过点 $(1,1,-2)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\ 3x-2z+1=0\end{cases}$ 平行的直线方程；

（2）将直线的一般方程 $\begin{cases}x-2y+z-3=0,\\ 3x-2z+1=0\end{cases}$ 化成点向式方程和参数方程；

（3）yOz 面上的曲线 $y^2=z$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转一周，求所得旋转曲面的方程；

（4）求通过点 $A(3,0,0)$ 和点 $B(0,0,1)$ 且与 xOy 面夹角成 $\dfrac{\pi}{3}$ 的平面的方程.

（5）设一平面垂直于平面 $z=0$，并通过点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0,\\ x=0\end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程.