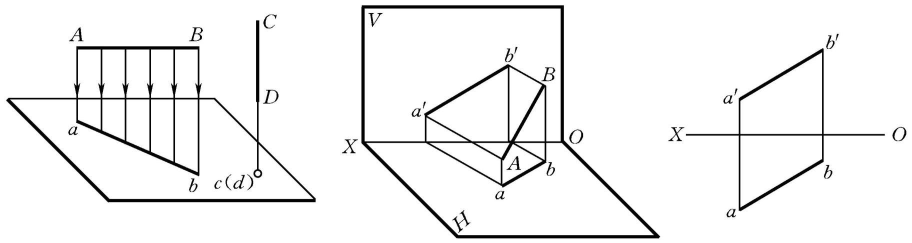
第四章　直线

第一节　直线的投影

直线的投影一般仍为直线。在图 4-1（a）中，通过直线 *AB* 上两端点 *A*、*B* 分别作投影面的垂线，与投影面的交点的连线就是直线 *AB* 对该投影线面的投影。只有当直线垂直于投影面时，其投影才积聚成为一点，图 4-1（a）中所示的 *CD*。

任何直线都可以由该直线上任意两点确定，所以直线的投影实质上就是点的投影，**可由直线上两点的同面投影来确定**，如图 4-1（c）所示。



（a）　　（b）　　（c）

图 4-1　直线的投影

第二节　直线对投影面的各种相对位置

在投影体系中，根据直线与投影面的相对位置不同，直线可以分为投影面平行线、投影面垂直线和一般位置直线。前两种直线都称为特殊位置直线。

一、投影面平行线

只平行于一个投影面而与其他两个投影面倾斜的直线称为投影面平行线。

平行于 *V* 面的直线称为正平线；

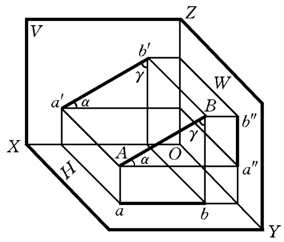
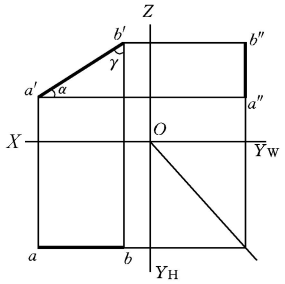
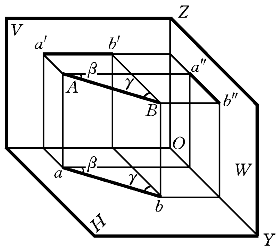
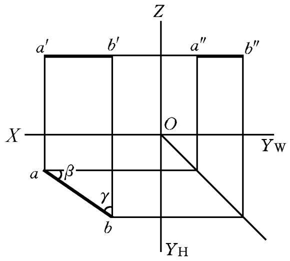
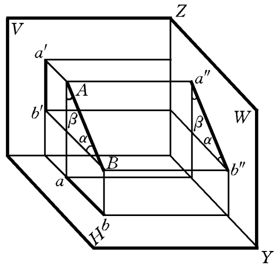
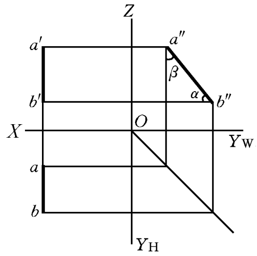
平行于 *H* 面的直线称为水平线；

平行于 *W* 面的直线称为侧平线。

下面以正平线为例说明投影面平行线的投影特性。

从表 4-1 中可知，直线 *AB*∥*V* 面，直线 *AB* 的正面投影反映该线段的实长。又因为直线 *AB* 倾斜于其他两个投影面，该直线的正面投影与投影轴的夹角α、γ反映空间直线与 *H* 面和 *W* 面的倾角，而且在 *H* 面和 *W* 面上的投影要比空间直线 *AB* 要短。由于直线 *AB* 上各点均与 *V* 面距离相等，所以 *ab*∥*OX*，*a″b″*∥*OZ*，详见表 4-1。

表 4-1　投影面平行线的投影特性

	轴测图	投影图	投影特性
正平线			1．正面投影 $a'b'$反映线段实长，它与 OX、OZ 轴的夹角即α、γ 2．水平投影 ab // OX 轴 3．侧面投影 $a''b''$ // OZ 轴
水平线			1．水平投影 ab 反映线段实长，它与 OX、OY_H 轴的夹角即β、γ 2．正面投影 $a'b'$ // OX 轴 3．侧面投影 $a''b''$ // OY_W 轴
侧平线			1．侧面投影 $a''b''$反映线段实长，它与 OY_W、OZ 轴的夹角即α、β 2．正面投影 $a'b'$ // OZ 轴 3．水平投影 ab // OY_H 轴

由表 4-1 可归纳出投影面平行线的投影特性为：

（1）**直线在它所平行的投影面上的投影，反映该线段的实长和对其他两投影面的倾角；**

（2）**直线在其他两个投影面上的投影分别平行于相应的投影轴，且都小于该线段的实长。**

二、投影面垂直线

垂直于一个投影面，同时平行于其他两个投影面的直线称为投影面垂直线。

垂直于 V 面的直线称为正垂线；

垂直于 H 面的直线称为铅垂线；

垂直于 W 面的直线称为侧垂线。

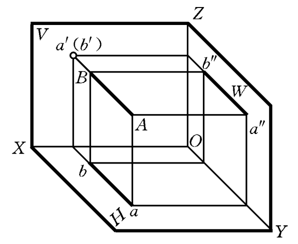
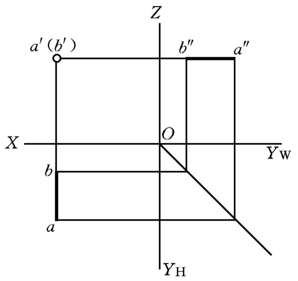
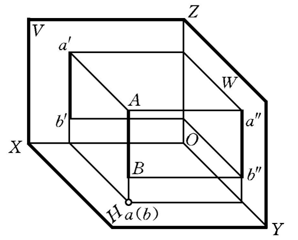
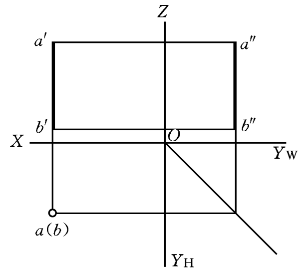
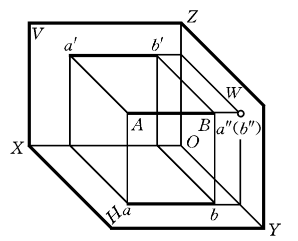
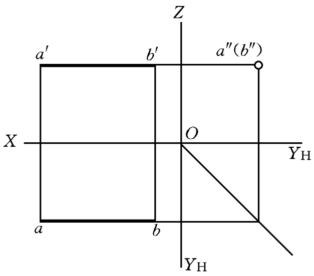
现将投影面垂直线的投影特性列表（表 4-2）说明如下。

由表 4-2 可归纳出投影面垂直线的投影特性为：

（1）**直线在它所垂直的投影面上的投影积聚成一点；**

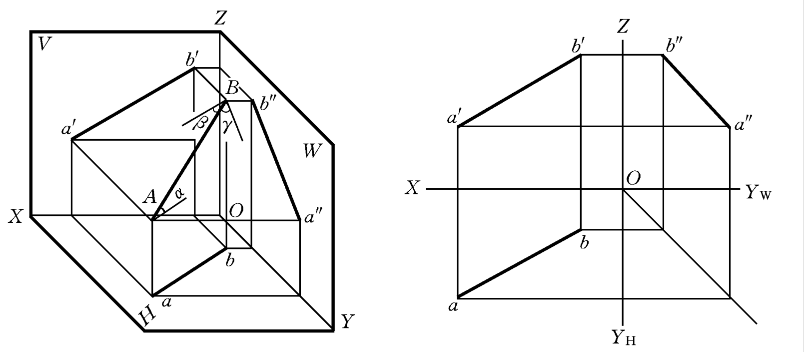
（2）**直线在其他两个投影面上的投影分别垂直于相应的投影轴，且反映该直线段实长。**

表 4-2　投影面垂直线的投影特性

	轴测图	投影图	投影特性
正垂线			1．正面投影 a'（b'）积聚成一点 2．水平投影 $ab\perp OX$ 轴，侧面投影 $a''b''\perp OZ$ 轴，并且都反映线段的实长
铅垂线			1．水平投影 a（b）积聚成一点 2．正面投影 $a'b'\perp OX$ 轴，侧面投影 $a''b''\perp OY_W$，并且都反映线段实长
侧垂线			1．侧面投影 a''（b''）积聚成一点 2．正面投影 $a'b'\perp OZ$ 轴，水平投影 $ab\perp OY_H$ 轴，并且都反映线段实长

三、一般位置直线

对三个投影面都倾斜的直线为一般位置的直线。图 4-2（a）中，直线 AB 同时倾斜于 H、V、W 三个投影面，它与 H、V、W 的倾角分别为 α、β、γ。



（a）　（b）

图 4-2　一般位置直线

一般位置直线的投影特性：**直线 AB 的各投影都不反映该线段的实长，也无积聚性**。虽然一般位置直线的投影不直接反映其实长和倾角，但只要利用空间线段及其投影之间的几何关系，就可以用图解的方法求得实长和倾角。

第三节　直线的实长及其对投影面的倾角

虽然一般位置直线的投影不反映线段的实长和对投影面的倾角。但是利用投影的特性，直线的两个投影完全可以确定空间直线的位置，所以完全可以求出直线的实长和倾角。

图 4-3（a）中，自 A 引 $AB_1 /\!/ ab$ 得直角三角形 AB_1B，$\angle B_1AB$ 就是直线 AB 与 H 面的倾角，其中直角三角形的一直角边为 $AB_1=ab$，另一直角边 BB_1 等于 B 点和 A 点的高差，其高差可由 b'和 a'到 OX 轴的距离（坐标）差 z_B-z_A 来确定。所以，根据直线的投影就可以作出与$\triangle AB_1B$ 全等的一个直角三角形，从而求得直线的实长及其对投影面的倾角。

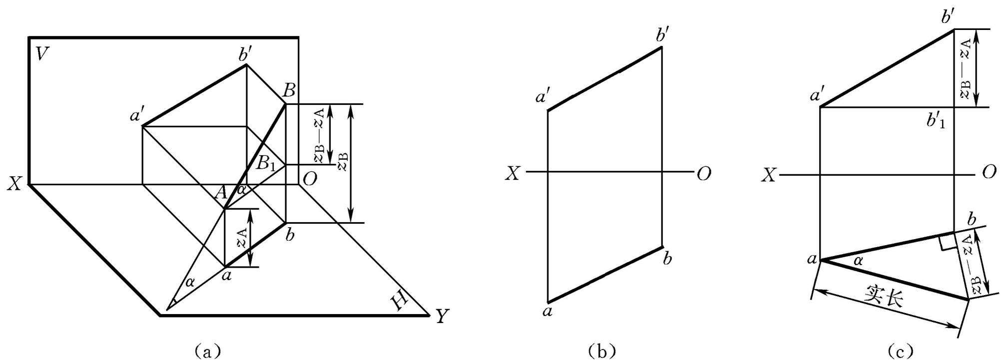


图 4-3　求实长和倾角

【例 4-1】已知直线 AB 的二面投影［图 4-3（b）］，求 AB 直线的实长和对水平面的倾角α。

解　作图步骤如下［图 4-3（c）］：

（1）过 a'作 OX 轴的平行线，交 bb'于 b_1'，$b'b_1'=z_B-z_A$。

（2）以 ab 为一直角边，过 a 或 b 作 ab 的垂线，并在垂线上截取 z_B-z_A 为另一直角边，直角三角形的斜边就是 AB 直线的实长，斜边与 ab 边的夹角α就是直线 AB 与水平面的倾角。

【例 4-2】已知直线 AB 的二面投影（图 4-4），求 AB 直线的实长和对正面的倾角β。

解　作图步骤如下［图 4-4（b）］：

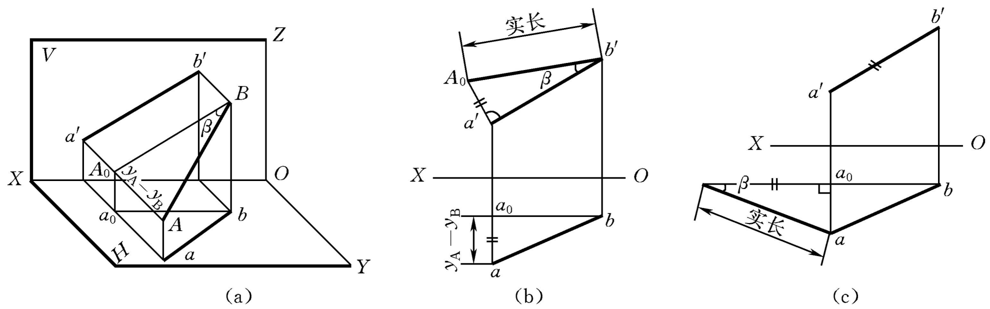


图 4-4　求直线的实长及倾角β

（1）以 $a'b'$为一直角边，过 a'或 b'作 $a'b'$的垂线，并在此线上截取 $a'A_0=y_A-y_B$。

（2）连接 $b'A_0$，则 $b'A_0$就是 AB 的实长，而$\angle a'b'A_0$即直线 AB 与正面的倾角β。另一种求解方法是以图 4-4（c）中的水平投影为基础，以 y 坐标差为一直角边，取 $a'b'$的长度作为直角三角形的另一直角边。

上述求直线的实长及其对投影面的倾角的方法称为直角三角形法。作图的方法如下：

以直线在某一投影面上的投影为一直角边，以直线两端点到该投影面的距离差（即坐标差）为另一直角边，所构成的直角三角形的斜边就是线段的实长，此斜边与该投影的夹角，就等于该直线对投影面的倾角。需要进一步说明的是：**在直角三角形的四要素（投影长、坐标差、实长及倾角）中，只要知道其中任意两个，就可以作出该直角三角形，即可以求出其他两个要素**。直角三角形可以画在图纸的任何空白地方。

【例 4-3】已知直线 AB 的水平投影 ab 和 A 点的正面投影 a'，AB 对 H 面的倾角为α=30°，完成 $a'b'$［图 4-5（a）］的正面投影。

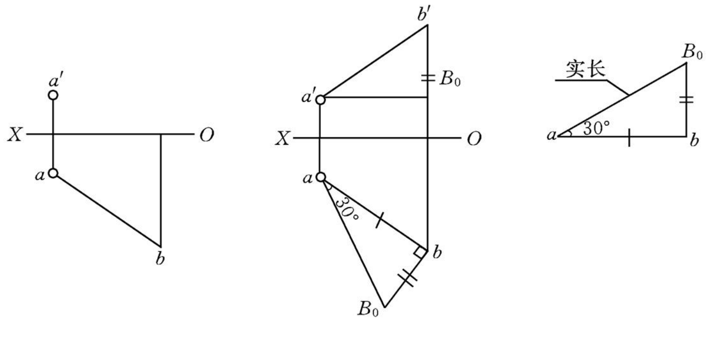


图 4-5　求作 $a'b'$

分析　根据直角三角形法，如果要求直线 AB 对 H 面的倾角α，必须以 AB 的水平投影 ab 为一直角边，以正面投影 $a'b'$两点的 z 坐标差为另一直角边，作直角三角形。

作图

（1）如图 4-5（b），以 ab 为一直角边，过 a 对 ab 作 30°角的斜线，此斜线与过 b 点的垂线交于 B_0点，bB_0即为另一直角边，即 z 坐标差；也可以在图纸适当的地方作图，如图 4-5（c）。

（2）利用 bB_0即可确定 b'。

本题有两解，请思考。

第四节　直线上的点

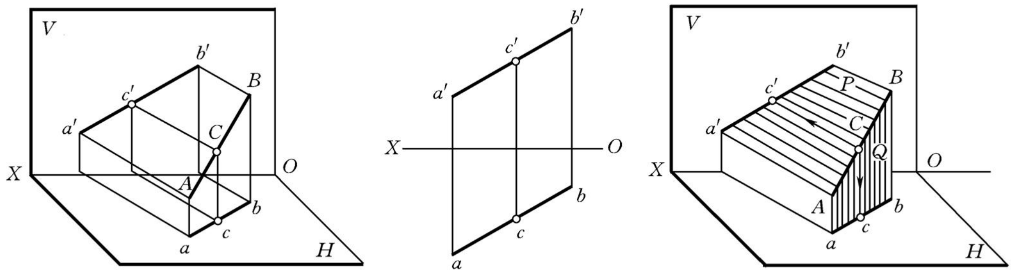
一、直线上点的投影

直线与点的相对位置有两种情况，即点在直线上和点不在直线上。

点在直线上，则该点的各个投影一定在直线的同面投影上，且符合点的投影规律［图 4-6（a）］。反之，点的各投影在直线的同面投影上，且符合点的投影规律，则点一定在该直线上。

图 4-6（b）中，c'在 $a'b'$上，c 在 ab 上，所以 C 点在 AB 上［图 4-6（c）］。这是因为 AB

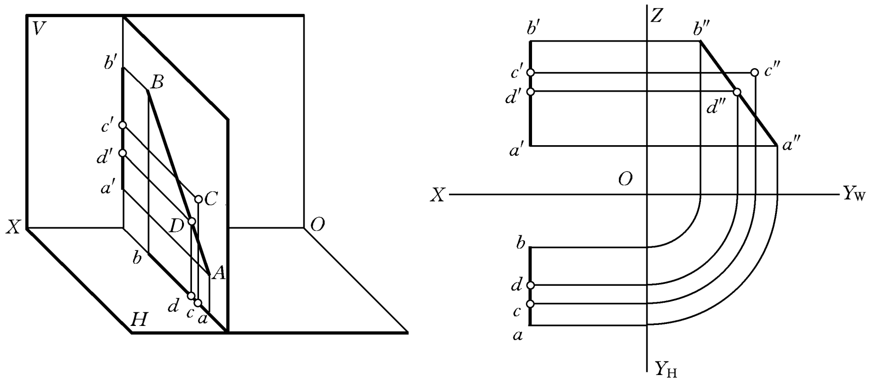
是一般位置直线。凡正面投影在 $a'b'$ 上的空间点，必位于过 $a'b'$ 而垂直于 V 面的平面 P 内；同样，凡水平投影在 ab 上的空间点必在过 ab 而垂直于 H 面的 Q 面内，因此，C 点一定在 Q 面和 P 面的交线上。



（a）　　（b）　　（c）

图 4-6　直线上的点

但是有一例外，当已知直线是侧平线时（图 4-7），仅靠点的正面投影和水平投影在直线的同面投影上，就不能确定该点是否在直线上。还需要利用其他方法求解（第三面法和定比法）。图 4-7（b）为第三面法。



（a）　　（b）

图 4-7　C 点不在直线上

二、分割线段成定比

图 4-6（a）中 C 点把 AB 分成 AC 和 CB 两段，设这两段的长度之比为 m:n，由于经各点向一投影面所引出的投影线是相互平行的，即 $Aa \parallel Cc \parallel Bb$，$Aa' \parallel Cc' \parallel Bb'$。所以 AC:CB=ac:cb=$a'c'$:$c'b'$=m:n。即：**如果点在直线上，该点的各个投影必将该直线的同面投影分成相同的比例。这个关系称为定比关系。**

【例 4-4】C 点把线段 AB 以 3:2 分为 AC 和 CB 两段，求 C 点的两个投影（图 4-8）。

解　按几何关系直接把 ab 分成 3:2，即 aC_0:C_0B_0=3:2，按相似关系由 C_0 就作出 c、c'。

【例 4-5】已知侧平线 CD 上一点 E 的正面投影 e'，求 e（图 4-9）。

解　因为 E 点在直线 CD 上，它的各个投影均应在直线的同面投影上，所以利用直线的侧面投影 $c''d''$，由 e' 定出 e''，再求出 E 的水平投影 e［图 4-9（a）］。

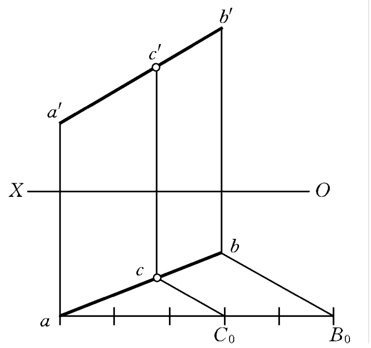


图 4-8 求分点 c、c'

利用定比关系来求解：根据 $d'e':e'c'=de:ec$，过水平投影 d 作任意直线 DC_0［图 4-9（b）］。在该线定出 C_0 和 E_0 两点，使 $dE_0=d'e'$，$E_0C_0=e'c'$，由 E_0 引直线平行于 C_0c，即可求出 e。

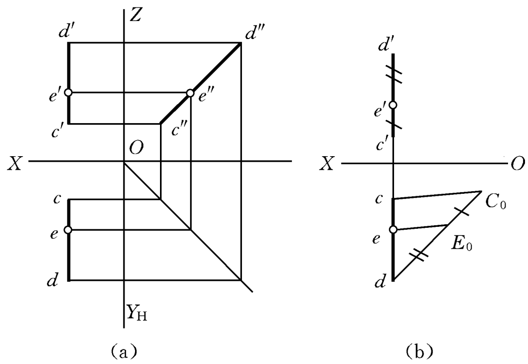


图 4-9 由 e' 求 e

三、直线的迹点

1. 直线与投影面的交点，称为直线的迹点

直线与正平面的交点称为正面迹点，用 N 表示；

直线与水平面的交点称为水平迹点，用 M 表示；

直线与侧平面的交点称为侧面迹点，用 S 表示。

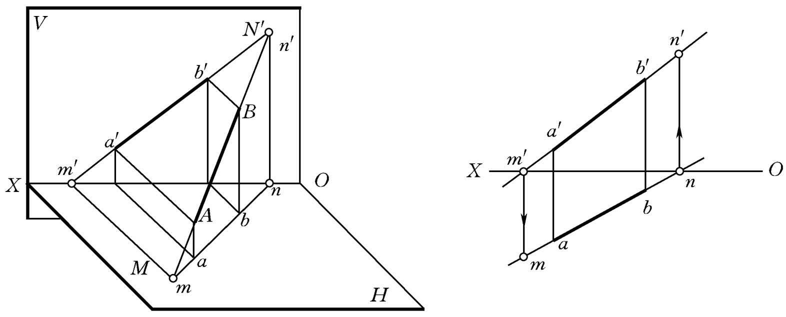
2. 迹点的特性和画法

因为迹点是直线和投影面的公共点，所以它们的投影有以下特性：

（1）作为投影面上的点，它在该投影面上的投影必与它本身重合，而另一投影必在投影轴上。

（2）作为直线上的点，它的各个投影必在该直线的同面投影上。

图 4-10（a）中，正面迹点 N 的正面投影 n' 与迹点本身重合，并且在直线的正面投影 $a'b'$ 上；N 的水平投影 n 必在 OX 轴上，又在 ab 上，即 n 为 ab 的延长线与 OX 轴的交点。同样，水平迹点 M 的水平投影 m 与迹点 M 本身重合，而且在 ab 上；M 的正面投影 m' 必在 OX 轴上，又在 $a'b'$ 上，即 m' 为 $a'b'$ 的延长线与 OX 轴的交点。由此可知，直线的投影与投影轴的交点一定是某迹点的一个投影，作图时首先求出迹点的这个投影，再求迹点的另一个投影。详细作法见图 4-10（b）。



（a）　（b）

图 4-10　直线的迹点

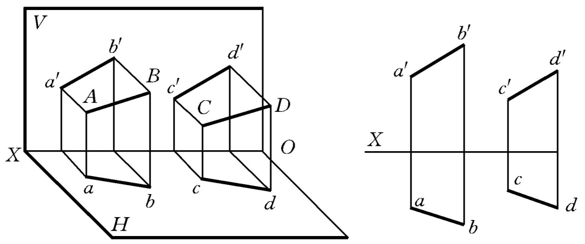
第五节　两直线的相对位置

两直线在空间的相对位置有三种：平行、相交和交叉。现述如下：

一、平行两直线

如果空间两直线互相平行，则此两直线的同面投影必互相平行；反之，如果两直线的各组同面投影互相平行，则此两直线在空间也一定互相平行。

图 4-11（a）中，已知直线 *AB*∥*CD*，通过 *AB* 和 *CD* 向水平投影面作垂直面 *ABba* 和 *CDdc*，因 *AB*∥*CD*，*Aa*∥*Cc*，所以此两平面互相平行，则它们与该投影面的交线 *ab* 和 *cd* 也必互相平行；同理 *a'b'*∥*c'd'*，*a"b"*∥*c"d"*。



（a）　（b）

图 4-11　平行两直线

就一般位置的两直线而言，如图 4-11（b）所示，仅根据它们的水平投影和正面投影互相平行，就可判定其在空间也互相平行。这是因为各投影及其投影线所形成的平面 *ABba*∥*CDdc*，*ABb'a'*∥*CDd'c'*［图 4-11（a）］。所以两对平行平面的交线也必互相平行，即 *AB*∥*CD*。

但是，当两直线同时为某一投影面平行线时，若要判别两直线是否平行，一般还要看两直线所平行的那个投影面上的投影才能确定。图 4-12 中，直线 *AB* 和 *CD* 都是侧平线，它们的正面投影和水平投影都是平行的，但它们的侧面投影

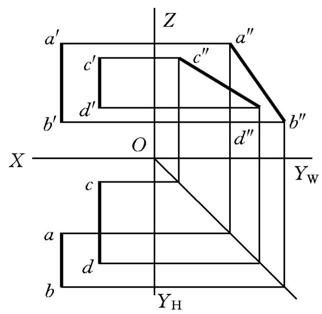


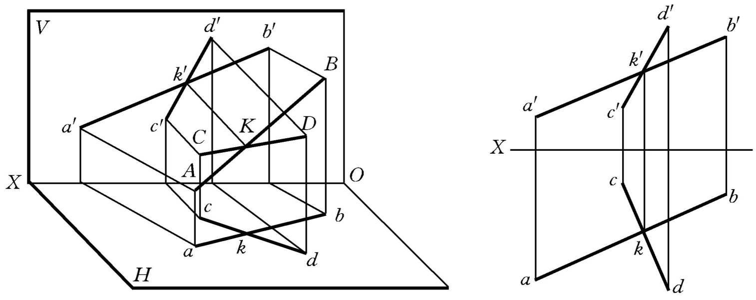
图 4-12　*AB* 不平行于 *CD*

不平行。所以 AB 不平行于 CD。

二、相交两直线

如果空间两直线相交，则此两直线的同面投影也必相交，且交点的投影必符合点的投影规律。

图 4-13 中，空间两直线 AB、CD 交于 K 点。因直线上一点的各投影在直线的同面投影上，即 k 在 ab 上，又在 cd 上，所以 k 一定是 ab 与 cd 的交点。同理，k'必为 $a'b'$和 $c'd'$的交点。k 和 k'是空间一点 K 的两个投影，所以 $kk'\perp OX$ 轴。



（a）　　　　　　（b）

图 4-13　相交两直线

反过来，如果两直线的同面投影均相交，且投影的交点符合点的投影规律，则此两直线在空间也一定相交。

在投影图上如何判断空间直线是否相交：如果当两直线都为一般位置直线时，只需用两组同面投影判断即可。图 4-13（b），可判定 AB 和 CD 是相交两直线。图 4-14 中 AB 和 CD 的水平投影积聚成一直线，这两直线一定是在垂直于 H 面的同一平面内，所以它们是相交的，交点为 K。

但是当两直线中的一直线为某一投影面平行线时，一般要看直线所平行的那个投影面上的投影才能确定它们是否相交。图 4-15 中两直线 AB 和 CD 的正面投影和水平投影均相交，由于 AB 是一侧平线，这时可以利用侧面投影检查其交点是否符合点的投影规律。从图 4-15 中可以看出正面投影的交点和侧面投影的交点的连线不垂直于 OZ 轴，所以 AB 和 CD 不相交。

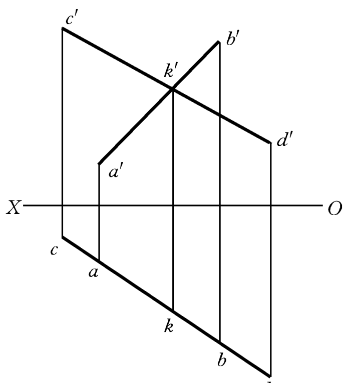


图 4-14　AB 与 CD 相交

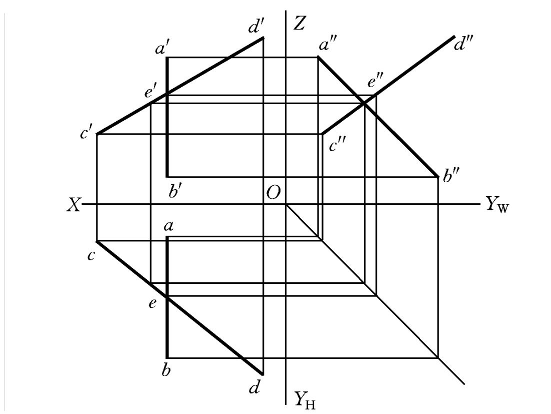


图 4-15　AB 与 CD 不相交

此题也可以利用定比关系来判别直线是否相交。图 4-15 中，$a'e':e'b' \neq ae:eb$，可以判定 E 点不是直线 AB 上的点，即 E 点不是两直线的交点，所以 AB 和 CD 不相交。

三、交叉两直线

既不平行也不相交的两空间直线，称为交叉两直线。

交叉两直线的同面投影可能有两组同面投影都互相平行，但不可能三面投影都互相平行，如图 4-16 所示。交叉两直线的同面投影可能三组同面投影均相交但其三个交点决不符合同一点的投影规律，这种交点实际上是重影点的投影，即两直线上不同两点在某投影面上的重合投影。如图 4-16（a）所示，直线 AB 和 CD 的水平投影 ab 和 cd 的交点 3（4），只是 AB 上 3 点和 CD 上 4 点在 H 面上的重合投影；$c'd'$和 $a'b'$的交点 1′（2′）也只是 CD 上 1 点和 AB 上的 2 点在 V 面上的重合投影。在投影图［图 4-16（b）］正面投影的交点 1′（2′）和水平投影的交点 3（4）的连线不垂直于 OX 轴，即不符合点的投影规律，这说明 AB 和 CD 是交叉两直线。

交叉两直线的重影点，存在着可见性问题。图 4-16（a），1 点和 2 点是对 V 面的一对重影点，由于 $y_1>y_2$ 即 1 点离 V 面较远，直线 CD 上的 1 点挡住了 AB 上的 2 点，所以 1 点可见，2 点不可见。在投影图［图 4-16（b）］中，CD 和 AB 的正面投影有一交点 1′（2′），过此点向下作一铅垂直线，先交 AB 于 2 点，后交 cd 于 1 点，从图中可以看出 $y_1>y_2$，即 1 点在前，2 点在后，所以 1 点可见，2 点不可见。

同理，3 点和 4 点是对 H 面的一对重影点，因 $z_3>z_4$，所以 3 点可见，4 点不可见。

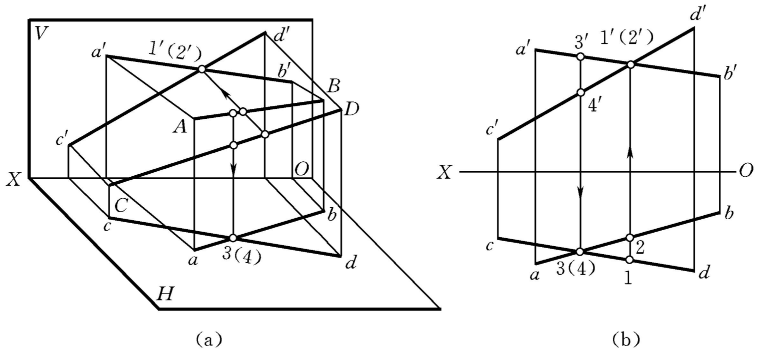


图 4-16　交叉直线的重影点

第六节　垂直两直线的投影

当垂直两直线的两边同时平行于一投影面时，在该投影面上的投影仍为直角；当垂直两直线的两边都不平行于某投影面时，在该投影面上的投影必不互相垂直。还有另一种情况，就是常用的直角的投影定理。

定理　若直角中有一边平行于某一投影面，则它在该投影面上的投影仍为直角。

图 4-17（a）中，已知 $BC \perp AB$，且 $BC /\!/ H$ 面，AB 是一般位置直线。求证：$bc \perp ab$。

证　因为 $BC \perp AB$，$BC \perp Bb$，故 $BC \perp$ 平面 $ABba$，又因为 $BC /\!/ H$ 面，所以 $bc /\!/ BC$，则 $bc \perp$ 平面 $ABba$，故 $bc \perp ab$，即 $\angle abc$ 为直角［图 4-17（b）］。

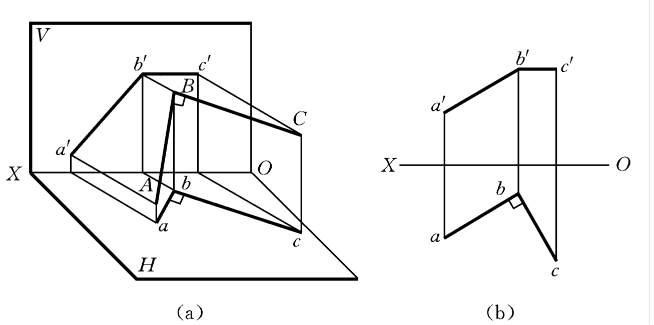


图 4-17　直角的投影

逆定理　若一角在某投影面上的投影为直角，且有一边平行于该投影面，则该两直线空间一定垂直。

在图 4-18 中，$\angle a'b'c'=90°$，又因 $bc/\!/OX$ 轴，BC 为正平线，所以空间两直线 AB 和 CD 互相垂直。

直角的投影定理既适用于互相垂直的相交两直线，也适用于交叉垂直的两直线。如图 4-19 所示，AB、CD 是交叉两直线，因为 $ab/\!/OX$ 轴，AB 是正平线，$a'b'\perp c'd'$，所以 AB 和 CD 是互相垂直的，这称为交叉垂直。

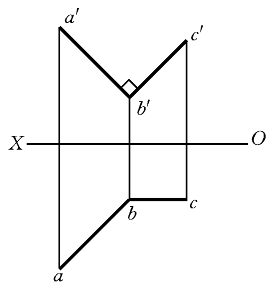


图 4-18　相交垂直

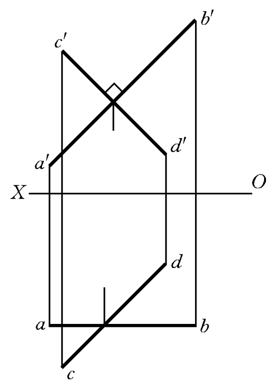


图 4-19　交叉垂直

【例 4-6】**求 *A* 点到水平线 *BC* 的距离**（图 4-20）。

分析　根据直角的投影定理可知：要使 $AK\perp BC$，则 $ak\perp bc$。

作图

（1）过 a 作 $ak\perp bc$，得交点 k。

（2）由 k 作 OX 轴的垂线交 $b'c'$于 k'。

（3）连 a'、k'，则 $a'k'$和 ak 即为所求距离的两个投影。

（4）用直角三角形法求出距离的实长 $a'K_0$，即为所求。

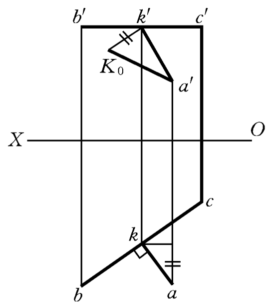


图 4-20　求距离的投影