

第2章 极限与连续

2.1 内容提要

2.1.1 数列的极限

1. 数列的概念

定义 1 对于自变量为正整数的函数 $u_n = f(n)$ ($n=1, 2, \dots$), 将其函数值按自变量 n 由小到大排成一系列数

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots,$$

该列数称为数列, 将其简记为 $\{u_n\}$, 其中 u_n 称为数列的通项或一般项.

定义 2 如果数列 $\{u_n\}$ 对于每一个正整数 n , 都有 $u_n \leq u_{n+1}$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递增的数列; 类似地, 如果数列 $\{u_n\}$ 对于每一个正整数 n , 都有 $u_n \geq u_{n+1}$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为单调递减的数列. 单调递增与单调递减的数列统称为单调数列. 如果对于数列 $\{u_n\}$ 存在一个固定的常数 M , 使得对于其每一项 u_n , 都有 $|u_n| \leq M$, 则称数列 $\{u_n\}$ 为有界数列.

2. 数列的极限

定义 3 对于数列 $\{u_n\}$, 如果当 n 无限增大时, 通项 u_n 无限趋近于某个确定的常数 a , 则称常数 a 为数列 $\{u_n\}$ 的极限, 或称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 a , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a \text{ 或 } u_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

若数列 $\{u_n\}$ 没有极限, 我们称该数列是发散的.

2.1.2 函数的极限

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 4 若当自变量 x 无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于某个确定的常数 A , 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow +\infty).$$

关于 $x \rightarrow -\infty$ 时函数极限的定义, 可仿照上面的定义给出.

如果当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A , 且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限也为 A , 则称当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限为 A , 记为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

定理 1 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$

2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限

定义 5 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义 (x_0 可以除外), 如果当自变量 x 趋近于 x_0

($x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某个确定的常数 A , 则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0).$$

如果当 x 从 x_0 的左侧 ($x < x_0$) 趋近于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0^-$) 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^-).$$

如果当 x 从 x_0 的右侧 ($x > x_0$) 趋近于 x_0 (记为 $x \rightarrow x_0^+$) 时, $f(x)$ 以 A 为极限, 则称 A 为当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^+).$$

定理 2 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$

2.1.3 极限的性质

定理 3 (唯一性定理) 如果函数 $f(x)$ 在某一变化过程中有极限, 则其极限是唯一的.

定理 4 (有界性定理) 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在, 则必存在 x_0 的某一邻域, 使得函数 $f(x)$ 在该邻域内有界.

定理 5 (两边夹定理) 如果对于 x_0 的某邻域内的一切 x (x_0 可以除外), 有 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$

定理 6 (数列极限存在准则) 单调有界数列必有极限.

2.1.4 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 6 在自变量的某个变化过程中, 极限为零的变量称为在此变化过程中的无穷小量, 简称无穷小.

2. 无穷小的性质

定理 7 在自变量的同一变化过程中,

- (1) 有限个无穷小的代数和仍是无穷小;
- (2) 有限个无穷小的乘积仍是无穷小;
- (3) 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小, 特别地, 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

3. 无穷大量

定义 7 在自变量 x 的某个变化过程中, 若函数值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大, 则称 $f(x)$ 为在此变化过程中的无穷大量, 简称无穷大.

4. 无穷小与无穷大的关系

定理 8 在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 反之, 若 $f(x)$

为无穷小且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

2.1.5 极限的运算法则

定理 9 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = AB;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

以上结论对于自变量 x 的其他变化过程同样成立.

一般地, 对于有理函数 (即两个多项式函数的商) 的极限, 有以下结论:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \infty, & \text{当 } m < n \text{ 时,} \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m = n \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } m > n \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

2.1.6 两个重要极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

这里的 e 是一个无理数 2.71828182845904..., 此极限也可记为

$$\lim_{\square \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\square}\right)^{\square} = e \quad (\text{式中 } \square \text{ 代表同一个变量}).$$

如果令 $\frac{1}{x} = t$, 则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 因此

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

2.1.7 无穷小的比较

定义 8 设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小, 则在该变化过程中:

(1) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$, 则称 α 为比 β 高阶的无穷小, 记作 $\alpha = o(\beta)$;

(2) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c \neq 0$, c 为常数, 则称 α 与 β 为同阶无穷小;

(3) 若 $\frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 1$, 则称 α 与 β 为等价无穷小, 记作 $\alpha \sim \beta$.

定理 10 (无穷小等价代换定理) 设在自变量的同一变化过程中 $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

2.1.8 函数的连续性概念

1. 函数的连续性概念

定义 9 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 如果当自变量的增量 Δx 趋于零时, 函数的增量 Δy 也趋于零, 即 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

定义 10 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义, 如果极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 且等于函数在 x_0 处的函数值, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

若函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左(右)连续, 如果函数 $f(x)$

在 (a, b) 内连续, 且在左端点 a 处右连续, 在右端点 b 处左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续.

2. 函数的间断点及其类型

由定义可知, 若要函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 必须同时满足以下三个条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义;

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

上述三个条件中只要有一条不满足, 就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断, x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点. 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 并且函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限都存在, 则称点 x_0 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点; 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

2.1.9 初等函数的连续性

定理 11 (连续函数的四则运算) 如果 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续, 那么 $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x_0) \neq 0$) 也在 x_0 处连续.

此定理表明, 连续函数的和、差、积、商 (分母不为零) 仍是连续函数.

定理 12 (反函数的连续性) 连续函数的反函数在其对应区间上也是连续函数.

定理 13 (复合函数的连续性) 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, $u_0 = \varphi(x_0)$, 且函数 $y = f(u)$

在 u_0 处连续, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)].$$

2.1.10 闭区间上连续函数的性质

定理 14 (最值定理) 闭区间上的连续函数一定有最大值和最小值.

定理 15 (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$.

定理 16 (零点定理) 如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

2.2 典型例题分析

例 1 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n^2 - 1}{n^5 + 6n^3 + 1}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3(n^2 + 2n + 6)^5}{(2n+5)^{13}}.$$

解 这两个数列极限都为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 形式, 且通项都是 n 的有理分式. 求这种形式的极限的方法主要是分子、分母同除以分子、分母中 n 的次数最高的项, 然后运用极限的四则运算法则求极限.

(1) 分子、分母同除以 n^5 , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n^2 - 1}{n^5 + 6n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^5}}{1 + \frac{6}{n^2} + \frac{1}{n^5}} = 1;$$

(2) 分子、分母同除以 n^{13} , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^3(n^2 + 2n + 6)^5}{(2n+5)^{13}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{6}{n^2}\right)^5}{\left(2 + \frac{5}{n}\right)^{13}} = \frac{1}{2}.$$

例 2 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}}$.

解 这里的极限仍为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 形式, 但通项不再是 n 的有理分式, 而是 n 的无理分式, 求极限方法仍与例 1 相同, 分子、分母同除以 n , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

例 3 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x \cdot \arctan x}.$$

解 (1) 此极限为 “ $\frac{0}{0}$ ” 形式, 可将分子、分母同时分解因式, 从而消去使分母成为零的因式, 有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2};$$

(2) 此极限为 “ $\frac{0}{0}$ ” 形式, 分子无法分解因式, 将其有理化, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(3) 此极限为 “ $\frac{0}{0}$ ” 形式, 由三角恒等式 $1-\cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$, 再利用无穷小等价代换定理有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x \cdot \arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

例 4 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2x^2-5}{x^3-3x+4}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}.$$

解 这两个极限都为 “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” 形式, 分别令分子、分母同除以 x^3 与 x , 得

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2x^2-5}{x^3-3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}} = 2;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

例 5 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2+x} \right); \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x).$$

解 这两个极限都为 “ $\infty-\infty$ ” 形式, 应分别经过通分和有理化后再计算.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2x-1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2+x} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2-x+x-2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2-1)}{x(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x} = 4;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

例6 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1}; \quad (3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x + 1)}{x^2 + 1}.$$

解 (1) 此极限为“ 1^∞ ”形式, 因此利用 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 直接凑成重要极限的形式, 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{5x} = \lim_{-x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{(-x)}\right]^{(-5)} = e^{-5};$$

(2) 当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1$ 为无穷小, 而 $\left|\sin \frac{1}{x-1}\right| \leq 1$, 即 $\sin \frac{1}{x-1}$ 为有界函数, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin \frac{1}{x-1} = 0;$$

(3) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 分子、分母的极限都不存在, 但由于 $|\sin x + 1| \leq 2$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$,

即当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{x}{x^2 + 1}$ 是无穷小, $\sin x + 1$ 是有界函数, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sin x + 1)}{x^2 + 1} = 0$.

例7 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} + a, & x < 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}, \text{ 试求 } a \text{ 为何值时, } f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 处的极限存在.}$$

解 讨论分段函数的分界点处的极限. 由于函数在分界点 $x=0$ 处两边的表达式不同, 因此, 一般要考虑在分界点 $x=0$ 处的左极限与右极限. 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \sin \frac{1}{x} + a\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x \sin \frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0^-} a = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2) = 1.$$

为使 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在, 必须有 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 即 $a=1$. 因此, 当 $a=1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

例8 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - ax - b\right) = 0$, 求 a, b 的值.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x + 1} - ax - b\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 + (2-a-b)x - 1 - b}{x + 1} = 0$,

由有理函数的极限可知, 上式分子中 x 的次数必须低于分母中 x 的次数, 因此 x^2 与 x 的系数都

等于 0, 即 $1-a=0$ 且 $2-a-b=0$, 所以 $a=1, b=1$.

例 9 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{在 } x=0 \text{ 处的连续性.}$$

解 由于函数在分界点 $x=0$ 处两边的表达式不同, 因此, 一般要考虑在分界点 $x=0$ 处的左极限与右极限以及该点处的函数值, 于是有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0, \quad f(0) = 0,$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, 故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 10 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & x \leq 0 \\ \frac{\sin bx}{2x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{在 } x=0 \text{ 处连续, 问 } a, b \text{ 应满足什么条件?}$$

解 本题已知函数在点 $x=0$ 处连续, 求函数的表达式中待定常数的值. 这类问题往往要根据函数在一点连续的充要条件来解决. 本题中函数是分段函数, 因此有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + bx^2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin bx}{2x} = \frac{b}{2}, \quad f(0) = a,$$

当 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = a$ 时, 即当 $a = \frac{b}{2}$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

2.3 习题选解

习题 2.1

3. 观察下列函数, 哪些是无穷小? 哪些是无穷大?

(1) $\frac{x-2}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(2) $\lg x$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时;

(3) $10^{\frac{1}{x}}$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时;

(4) $x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(5) $2^{-x} - 1$, 当 $x \rightarrow 0$ 时;

(6) e^{-x} , 当 $x \rightarrow +\infty$ 时.

解 (1)(2)(3) 是无穷大, (4)(5)(6) 是无穷小.

习题 2.2

1. 求下列极限.

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$;

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$;

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 5x + 2}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right)$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \sin \frac{1}{x}$.

解 (2) $\because \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+1} = \frac{0}{4} = 0, \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3} = \infty;$

(3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = 0;$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{3x^2 - 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{1}{3};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{(x-2)(x+2)},$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x} = 0, \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \right) = \infty;$

(9) $\because \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) = 0, \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1, \therefore \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \sin \frac{1}{x} = 0.$

2. 求下列极限.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{1}{x};$ (6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{x}};$ (7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1};$

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x;$ (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}.$

解 (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1;$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1-4x)^{\frac{-1}{4x} \cdot (-4)} = e^{-4};$

(7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = 0;$

(8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{2}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{\frac{x}{2} \cdot (-2)}} = \frac{e}{e^{-2}} = e^3;$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2x)^2}{x^2} = 8.$

3. 证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1$ 与 x , $\ln(1+x)$ 与 x , 是等价无穷小.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{y=e^x-1}{=} \lim_{x=\ln(y+1)} \frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\ln e} = 1,$
 $\therefore e^x - 1 \sim x, x \sim \ln(x+1).$

4. 利用等价无穷小代换计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 5x}; (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}; (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x}; (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{3x}.$$

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 + 3x} = \frac{1}{3};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

习题 2.3

1. 讨论下列函数在指定点处的连续性, 若是间断点, 说明间断点类型.

$$(1) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x = 1, x = 2; (3) y = \cos \frac{1}{x}, x = 0.$$

解

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)},$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty,$$

$\therefore x = 1$ 为第一类间断点 (可去间断点), $x = 2$ 为第二类间断点 (无穷间断点);

$$(3) \therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \text{ 不存在,}$$

$\therefore x = 0$ 为第二类间断点 (振荡间断点).

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$, 应当怎样选择 a , 才能使 $f(x)$ 在其定义域内连续?

解 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 0 = a,$

$\therefore a = 0$ 时 $f(x)$ 连续.

3. 证明方程 $x^5 - 3x - 1 = 0$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

证明 令 $f(x) = x^5 - 3x - 1$,

$$\therefore f(x) \text{ 在 } [1, 2] \text{ 连续, 且 } f(1) = -3 < 0, \quad f(2) = 2^5 - 6 - 1 = 25 > 0,$$

$\therefore$ 至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$ 使 $f(\xi) = 0$, 即方程在 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

复习题 2

1. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 - \tan x}}{\sin x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\tan x) - (1-\tan x)}{\sin x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x}{\sin x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1-\tan x})} = 1;$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x} \stackrel{x=\pi-t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\pi-t)}{1 + \cos^3(\pi-t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{1 - \cos^3 t}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{(1 - \cos t)(1 + \cos t + \cos^2 t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2 \sin^2 \frac{t}{2} (1 + \cos t + \cos^2 t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 (1 + \cos t + \cos^2 t)} = \frac{2}{3};$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1 - \sqrt{1 + \tan x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 + \sqrt{1 + \tan x})}{- \tan x} = -2;$

(4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3}.$$

2. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1}.$

解 $\because e^x - 1 \sim x \quad (x \rightarrow 0),$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-1}{e^x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(\sqrt{1+\sin x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 求 a 值.

解 $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \pi \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \pi,$

$\therefore f(0) = a = \pi$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

自测题 2

1. 填空题

(1) 已知 a, b 为常数, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx - 1}{2x + 1} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____;

(2) $x=0$ 是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 的 _____ 间断点;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin kx} = 2$, 则 $k =$ _____.

解 (1) $\because$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 两个多项式比值的极限为最高项的系数之比,

$$\therefore a=0, b=4;$$

$$(2) \because \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$\therefore x=0$ 是可去间断点;

$$(3) \because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{kx(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2k} = 2,$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}.$$

2. 单选题

(1) 下列极限存在的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x};$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x + 1}{3x^4 - x + 2};$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln|x|;$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x.$

(2) 设 $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ().

A. 有定义; B. 极限存在; C. 左极限存在; D. 右极限存在.

(3) 当 $x \rightarrow 0$ 时, () 与 x 不是等价无穷小.

A. $\ln(1+x);$

B. $2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x});$

C. $\tan x;$

D. $\sin x.$

解 (1) $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = \infty, \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{-x}$ 不存在;

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + x + 1}{3x^4 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{3 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \frac{2}{3}, \lim_{x \rightarrow \infty} |x| = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \text{ 不存在, 故选 B;}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \text{ 故选 C;}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2[1+x - (1-x)]}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ 故选 B.}$$

3. 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{x+1};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cdot \sin x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right);$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\text{解} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{2x} \right)^x}{\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right);$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{2x} \right)^{-\frac{2}{3}x \left(-\frac{3}{2} \right)}}{\left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{2x \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \frac{2 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} \cdot 1 = e^{-2};$$

$$(2) \quad \because \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0, \quad |\sin x| \leq 1 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \sin x = 0;$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)-4}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4};$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. 讨论函数 $f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$ 的间断点.

解 间断点为 $x=0$. 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 2^{-\frac{1}{x}}}{1 + 2^{-\frac{1}{x}}} = 1$, 所以 $x=0$ 为跳

跃间断点.

5. 证明方程 $x^2 + 2x = 5$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一个根.

证明 令 $f(x) = x^2 + 2x - 5$, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 内连续, 且 $f(1) = -2 < 0$, $f(2) = 3 > 0$, 所以至少存在一点 $\xi \in (1, 2)$ 使 $f(\xi) = 0$, 即 $x^2 + 2x = 5$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个实根.

2.4 同步练习及答案

同步练习

1. 填空题

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{x+1} = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \quad x=1 \text{ 是 } f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} \text{ 的 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 间断点};$$

(4) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \sqrt{e}$, 则_____;

(5) 若 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^3 + \frac{2x^2 + 1}{x + 1} + 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ _____.

2. 单选题

(1) 下列极限存在的是 ().

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$;

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x - 1}{3x^2 - x + 2}$;

C. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$;

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$.

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - 1}{2x + 1} = 4$, 则常数 $a =$ ().

A. 2;

B. 4;

C. 6;

D. 8.

(3) 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义是它在该点处连续的 ().

A. 必要条件;

B. 充分条件;

C. 充要条件;

D. 无关条件.

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x}$ 的值是 ().

A. 0;

B. 1;

C. ∞ ;

D. 不存在.

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, () 与 x 不是等价无穷小量.

A. $\ln(1 + 2x)$;

B. $e^x - 1$;

C. $\arctan x$;

D. $\sin x$.

3. 解答题

(1) 求下列各极限: ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x+1}$; ② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

(2) 设函数 $f(x) = \frac{4x^2 + 3}{x - 1} + ax + b$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 试确定 a 与 b .

(3) 讨论函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的间断点并说明它是哪类间断点.

参考答案

1. (1) 3; (2) e^{-2} ; (3) 可去; (4) $\frac{1}{2}$; (5) $-\frac{5}{2}$.

2. (1) A; (2) D; (3) A; (4) D; (5) A.

3. (1) ① e^2 ; ② $\frac{1}{2}$.

(2) $a = -4$, $b = -4$.

(3) $x = 1$ 是可去间断点, $x = 2$ 是第二类间断点.