第 8 章　向量代数与空间解析几何

【学习目标】

- 理解空间直角坐标系的概念，掌握两点间距离公式，理解向量的概念及其坐标表示式，会求向量的模、方向余弦及单位向量
- 会用向量坐标进行向量的线性运算、数量积与向量积运算，会求两向量的夹角，掌握两向量平行、垂直的充要条件
- 掌握平面的方程与直线的方程，会用简单的条件求平面与直线的方程，理解平面与平面、直线与直线、平面与直线的关系，会求点到平面的距离
- 了解空间曲面、曲线及其方程的概念，知道空间曲线的一般方程及参数方程，会求简单的空间曲线在坐标面上的投影

在初等数学中我们学过了平面解析几何，在平面解析几何中，通过坐标法将平面上的点与有序的二元数组一一对应，将平面几何图形与二元方程一一对应，从而可以用代数方法研究平面几何图形的问题．与此类似，对于空间几何图形，可以建立空间直角坐标系，使空间的点与三元数组对应起来，从而使空间几何图形与三元方程一一对应起来，即用代数方法研究空间几何图形问题．

本章先建立空间直角坐标系，介绍向量及其基本运算，然后以向量知识为基础，介绍空间几何图形——平面、直线、曲面和曲线的方程及其相关知识．

8.1　向量及其线性运算

8.1.1　空间直角坐标系

自空间一定点 O，作三条两两垂直的数轴 O_x、O_y、O_z，通常把 O_x 轴和 O_y 轴配置在水平面上，而 O_z 轴与水平面垂直．各轴正向按右手法则确定，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴正向．这就构成了一个空间直角坐标系 $O-xyz$，如图 8-1 所示．称 O 点为坐标原点，数轴 O_x、O_y、O_z 为坐标轴，简称 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴）．任意两条坐标轴所确定的平面统称为坐标平面，它们是 xOy 面、yOz 面、zOx 面，三个坐标平面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限，如图 8-2 所示．

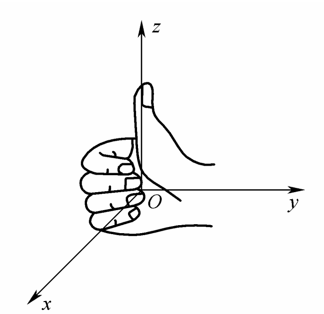

图 8-1

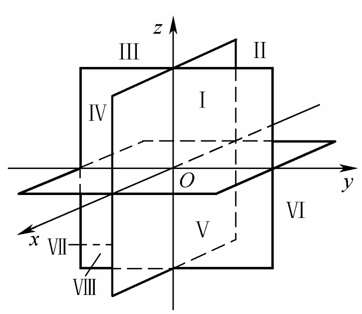

图 8-2

在空间直角坐标系中，平面上的点与有序实数组一一对应，以下讨论在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，空间中的点与有序实数组之间的对应关系.

设 M 为空间中的一点，过点 M 分别作垂直于坐标轴的平面，它们与 x 轴、y 轴、z 轴分别交于点 P、Q、R. 点 P、Q、R 叫做点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影，如图 8-3 所示，设 P、Q、R 在相应坐标轴上的坐标依次为 x、y、z，这样，空间中的一个点 M 唯一确定了一个有序实数组 (x,y,z).

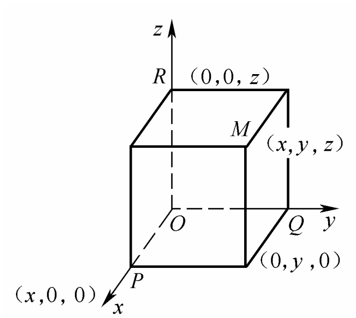

图 8-3

反之，任意给定一个有序实数组 (x,y,z)，可以在坐标轴上确定与它们相对应的点 P、Q、R，即过这三点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这 3 个平面必然交于空间一点 M. 这样一个有序实数组 (x,y,z) 唯一地确定了空间中的一个点 M. 由此可见，空间中的一点 M 与有序实数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，这一数组称为点 M 的坐标，x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，这时点 M 记作 $M(x,y,z)$.

特殊地，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 坐标平面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 坐标平面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 坐标平面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

接下来我们推导空间两点的距离公式. 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间

中的两点，过点 M_1, M_2 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这 6 个平面构成一个长方体，如图 8-4 所示，$|M_1M_2|$ 为该长方体对角线的长.

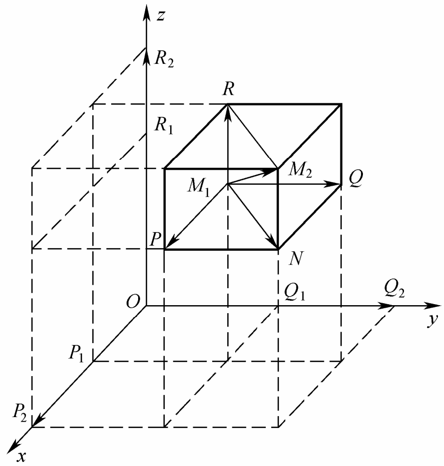

图 8-4

由长方体对角线计算公式知

$$|M_1M_2| = \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2}$$

由于

$$|M_1P| = |x_2 - x_1|,\quad |PN| = |y_2 - y_1|,\quad |NM_2| = |z_2 - z_1|$$

所以点 M_1, M_2 间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特殊的，点 M 到原点 O 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

例 8.1　求点 $M(1,-1,2)$ 到 x 轴的距离.

解　设 $M(1,-1,2)$ 在 x 轴的投影为 P，则点 P 的坐标为 $P(1,0,0)$，且线段 MP 的长就是点 M 到 x 轴的距离，于是

$$|MP| = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}\ .$$

8.1.2　向量的概念及其线性运算

1．向量的概念

在日常生活中，我们常会遇到这样两种不同类型的量，一类是数量，如时间、长度、体积等，它们是只有大小的量；另一类是向量（又称矢量），如速度、加速度、位移、力等，它们不仅有大小还有方向.

几何上，常用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量．有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．向量常记为$\vec{F},\vec{a},\vec{b},\vec{c}\cdots$或$\boldsymbol{F},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\cdots$．起点为$A$、终点为$B$的有向线段所表示的向量常记为$\overrightarrow{AB}$，如图 8-5．起点为$O$、终点为$M$的向量$\overrightarrow{OM}$称为点$M$对于起点$O$的**向径**，常用$\boldsymbol{r}$表示，如图 8-6．于是，空间每一点$M$，对应一个向径$\overrightarrow{OM}$；反之，每一个向径$\overrightarrow{OM}$，对应着空间中一个确定的点$M$．

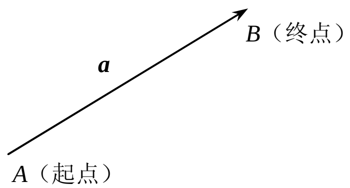

图 8-5

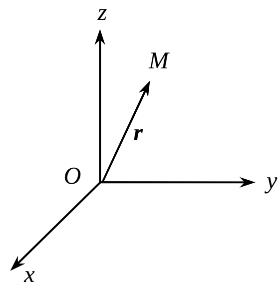

图 8-6

表示向量$\boldsymbol{a}$的大小的数称为向量的模（或向量的长度），记为$|\boldsymbol{a}|$．模等于零的向量称为零向量，记为$\boldsymbol{0}$或$\vec{0}$．零向量的方向可以看作是任意的，它表示空间中一点．模等于 1 的向量称为单位向量．

当两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向相同、模相等时，称它们为相等的向量，记为$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，如果向量只取决于大小和方向，与起点位置无关，称这样的向量为自由向量．于是，任意一个向量经过平移后与原向量相等．本书除特别指明外，都是指自由向量．当两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的方向相同或相反时，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行，记为$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$．由于平行的向量经平移后，可放在同一条直线上，所以平行向量又称为共线向量．与向量$\boldsymbol{a}$大小相等，方向相反的向量，称为向量$\boldsymbol{a}$的负向量，记作$-\boldsymbol{a}$．

将两个非零向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平移，使它们的起点重合，它们所在射线的夹角$\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，如图 8-7 所示，称为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$．当$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$时，称向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直，记作$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$．

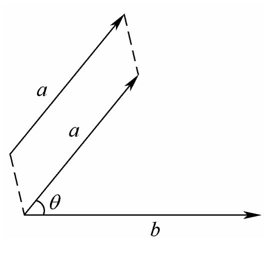

图 8-7

特别地，因为零向量的方向可以是任意的，所以可认为零向量与任意向量平行，零向量与任意向量垂直，并且，当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时，规定它们的夹角可以在 $[0,\pi]$ 中任意取值.

2. 向量的线性运算

向量的加、减法，数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

设有两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA , OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，则向量 $\overrightarrow{OC}$ 称作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图 8-8 所示，这种方法称为向量加法的平行四边形法则.

由图 8-8 知，向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的加法也可规定如下：将向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，$\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量便是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，如图 8-9 所示．这种方法叫做向量加法的三角形法则．当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，三角形法则也适用.

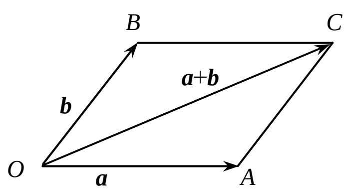

图 8-8

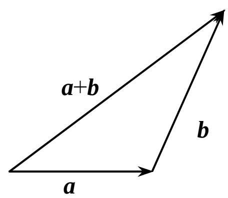

图 8-9

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$． $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可按图 8-10 的方法作出．即将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量，为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

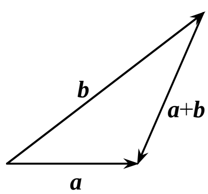

图 8-10

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的数乘运算，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$． $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

它的方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，方向任意.

若 $\boldsymbol{a}$ 是任意非零向量，$\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则由向量的数乘运算知

$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，于是 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

一般地，向量的加法，数乘有以下运算性质：

（1）交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$　（λ,μ 是实数）；

（3）分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$　（λ,μ 是实数）；

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$　（λ 是实数）.

由数与向量的乘法，可得下面的定理.

定理 8.1　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 λ，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}.$$

证　充分性是显然的，下面证明必要性.

设 $\boldsymbol{b} \parallel \boldsymbol{a}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向时，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向时，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，则

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

因此

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

再证数 λ 的唯一性．设另有数 μ 使 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则

$$\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}，即 (\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}.$$

因 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，故 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$.

8.1.3　向量的坐标表示式

1．向径的坐标表示式

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，分别在 x 轴、y 轴、z 轴上有一个与坐标轴同向的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，称它们为直角坐标系 $O-xyz$ 的基本单位向量．如图 8-11 所示，设向径 $\overrightarrow{OM}$ 的终点 M 的坐标为 (x,y,z)，过点 M 分别作垂直于坐标轴的平面，它们在 x 轴、y 轴、z 轴上的交点分别为 P,Q,R，其坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$，于是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}，\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PN}=y\boldsymbol{j}，\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{NM}=z\boldsymbol{k}，$$

由向量的加法知

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

即

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

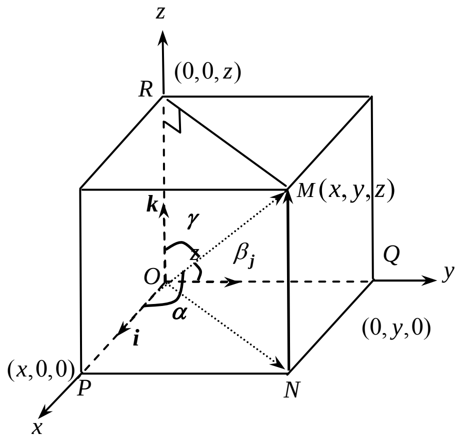

图 8-11

上式称为向径$\overrightarrow{OM}$的基本单位向量的分解表示式，其中$x\boldsymbol{i}$, $y\boldsymbol{j}$, $z\boldsymbol{k}$称为向径$\overrightarrow{OM}$在x轴、y轴、z轴上的分向量，x, y, z称为向径$\overrightarrow{OM}$在x轴、y轴、z轴上的投影，并称这个有序的数组(x,y,z)为向径$\overrightarrow{OM}$的坐标，记作

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z),$$

上式称为向径$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式．显然向径$\overrightarrow{OM}$与它的三个坐标是一一对应的，因此它的基本单位向量的分解表示式及坐标表示式是唯一的．

向径$\overrightarrow{OM}$的模$|\overrightarrow{OM}|$表示点O, M间的距离，即

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

向径$\overrightarrow{OM}$的方向可由$\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴不超过π的夹角唯一确定．称向径$\overrightarrow{OM}$与x轴、y轴、z轴的夹角α,β,γ为向径$\overrightarrow{OM}$的方向角（$0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$），称$\cos a$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$为向径$\overrightarrow{OM}$的方向余弦．由图 8-11 知，ΔORM为直角三角形，于是

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

同理得

$$\cos a=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

且

$$\cos^2 a+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

2. 向量的坐标表示式

设任一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的起点、终点分别为$M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$，点M_1、M_2

对应的向径分别为$\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，如图 8-12，则

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}\,,$$
$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}\,,$$

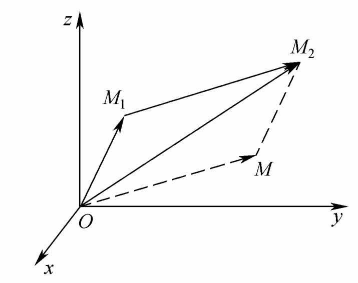

图 8-12

从而

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\,.$$

上式称为任意向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的基本单位向量的分解表示式，其中$(x_2-x_1)\boldsymbol{i}$，$(y_2-y_1)\boldsymbol{j}$，$(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴、y轴、z轴上的分向量，三个数x_2-x_1，y_2-y_1，z_2-z_1称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$在x轴、y轴、z轴上的投影，并称这个有序的数组$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标，记作

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\,.$$

上式称为向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

由于任意向量可平移成向径，设向量$\overrightarrow{M_1M_2}$平移后为向径$\overrightarrow{OM}$，于是

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)\,.$$

且M点的坐标为$M(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$，于是

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

上式即为两点间的距离公式.

若向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与x轴、y轴、z轴的夹角分别为α,β,γ，则它们分别等于向径$\overrightarrow{OM}$与x轴、y轴、z轴的夹角，于是有

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\,,$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}\,,$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}.$$

且 $$\cos^2 a+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

3. 向量的和差与向量的数乘的坐标表示式

设向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式分别为

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\text{，}\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$$

则其基本单位向量的分解表示式为

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$

设 λ 为任意实数，由向量的加法和数乘运算法则知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda\boldsymbol{a}&=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\\&=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)\text{，}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

若 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量，则由 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 和 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}$ 得

$$\boldsymbol{a}^0=\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\frac{a_y}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}},\frac{a_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

例 8.2 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与各坐标轴成相等的锐角，$|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{3}$，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

解 由已知条件可设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴的夹角都为 θ，其中 θ 为锐角，则

$$\cos^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$$

由 θ 是锐角知 $$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{，}\quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

于是 $$\boldsymbol{a}_x=|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\theta=2$$

同理 $$\boldsymbol{a}_y=\boldsymbol{a}_z=2$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式为 $\boldsymbol{a}=(2,2,2)$.

例 8.3 已知点 $M_1(1,0,-1)$ 和 $M_2(2,\sqrt{2},0)$，求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量

解 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式为 $\quad\overrightarrow{M_1M_2}=(1,\sqrt{2},1)$

于是

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$$

方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}$$

方向角为

$$\alpha = \frac{\pi}{3},\ \beta = \frac{\pi}{4},\ \gamma = \frac{\pi}{3}$$

与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 方向相同的单位向量为 $\boldsymbol{e} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

由定理 8.1 知，向量 $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ 与非零向量 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 平行的充分必要条件是存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$，即

$$(b_x, b_y, b_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \tag{8.1}$$

或写成

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda \tag{8.2}$$

若 a_x, a_y, a_z 中某一个或某两个数为零，则（8.2）式只是（8.1）式书写的简洁形式，应理解为相应的分子也为零．例如，$\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{0} = \dfrac{b_z}{a_z}$ 理解为 $b_y = 0$，$\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_z}{a_z}$．

例 8.4 已知 $\boldsymbol{a} = (\lambda, 2, -1)$, $\boldsymbol{b} = (0, -2, \mu)$，问 λ, μ 为何值时 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$？

解 由 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 得 $\dfrac{\lambda}{0} = \dfrac{2}{-2} = \dfrac{-1}{\mu}$，即 $\lambda = 0,\ \mu = 1$

所以当 $\lambda = 0,\ \mu = 1$ 时 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$．

练习题 8.1

1．在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中画出点 $A(0,0,1)$, $B(2,1,0)$, $C(1,2,3)$．

2．写出点 $(2,-1,1)$ 关于坐标原点 O、x 轴、及 xOy 面对称的点的坐标．

3．求点 $A(1,2,-1)$ 和 $B(0,-1,-2)$ 间的距离．

4．在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点．

5．求点 $(1,-3,5)$ 到 x 轴的距离 d．

6．设 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$，求 $2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$．

7．给定点 $A(2,1,1)$, $B(1,3,0)$，求 $\overrightarrow{AB}$ 的模、方向余弦及与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量．

8.2 向量的乘法运算

8.2.1 向量的数量积

数量积是从物理、力学问题中抽象出来的一个数学概念．例如，有一个物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线运动，产生了位移 $\boldsymbol{s}$．实验证明，力 $\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta ,$$

其中 θ 是力 $\boldsymbol{F}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的夹角，如图 8-13．上式的右边可以看成两个向量进行某种运算的结果，这种运算就是两个向量的数量积．

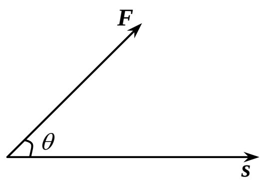

图 8-13

定义 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个向量，它们的模及夹角的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（又称点积或内积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \tag{8.3}$$

于是力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 可简记为

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}$$

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都不是零向量时，数 $|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，如图 8-14，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

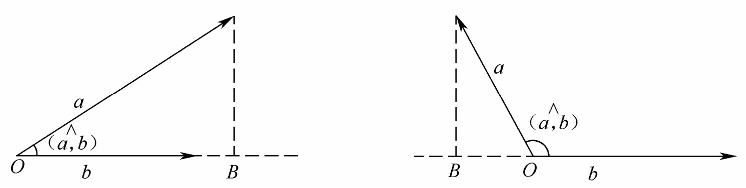

图 8-14

同样，数 $|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$，即

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}$$

因此（1）式又能写成

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Pr}\,j_{b}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Pr}\,j_{a}\boldsymbol{b}$$

由数量积定义可得以下运算性质：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$；

（2）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$，其中$\boldsymbol{0}$是零向量；

（3）交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

（4）结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，其中$\lambda$是实数；

（5）分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

对于基本单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，有 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$和 $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，于是对于向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，我们有向量数量积的坐标表示式：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)$$

并且 $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$$

由数量积的定义可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$的充分必要条件是$|\boldsymbol{a}|=0$或$|\boldsymbol{b}|=0$或$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，这也是$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$的充分必要条件．因此我们有下述定理．

定理 8.2 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$或$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$．

例 8.5 设向量$\boldsymbol{a}=(-1,0,1),\boldsymbol{b}=(2,1,1)$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Pr\,j}_{b}\boldsymbol{a}$．

解 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times2+0\times1+1\times1=-1$$

因为 $$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$$

所以 $$\mathrm{Pr\,j}_{b}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

例 8.6 向量$\boldsymbol{a}=(-1,1,0),\boldsymbol{b}=(0,1,-1)$，求$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$与$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模．

解 因为 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(-1)\times0+1\times1+0\times(-1)=1,$$

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

所以 $$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

又因为 $$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=4|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+|\boldsymbol{b}|^2\\&=4\times2-4\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}+2\\&=6\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$的模为 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{6}$．

8.2.2 向量的向量积

为了说明向量积的概念，先看一个例子．设O为一杠杆的支点，有一力$\boldsymbol{F}$作用于杠杆的点A处，由力学知，力$\boldsymbol{F}$对支点O的力矩是一个向量M，它的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{OP}|=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{OA}|\sin\theta\,,$$

其中θ是力$\boldsymbol{F}$与$\overrightarrow{OA}$的夹角，如图 8-15 所示，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\theta$是力臂．力矩$\boldsymbol{M}$的方向是这样规定的：$\boldsymbol{M}$同时垂直于$\boldsymbol{F}$和$\overrightarrow{OA}$，且$\overrightarrow{OA},\boldsymbol{F},\boldsymbol{M}$构成右手系，即当右手的四个手指指向$\overrightarrow{OA}$的方向，握拳转向$\boldsymbol{F}$时，大拇指所指的方向为力矩$\boldsymbol{M}$的方向．

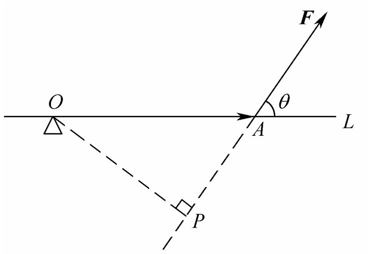

图 8-15

由此可见，力矩$\boldsymbol{M}$完全由向量$\overrightarrow{OA}$和力$\boldsymbol{F}$这两个向量所确定，数学称由两个已知向量按上述方法确定的向量为两个已知向量的向量积．

定义 8.1 两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的向量积（又称叉积或外积）是一个向量，记作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$．它按下列方式来确定：

（1）模$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

（2）方向$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所确定的平面，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$构成右手系，如图 8-16 所示．

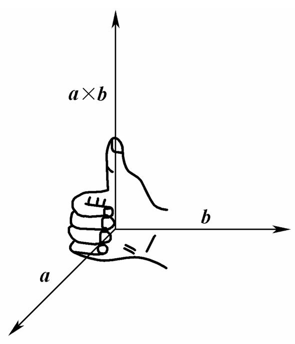

图 8-16

依照定义 8.1，力矩 $\boldsymbol{M}$ 可表示成

$$\boldsymbol{M}=\overrightarrow{OA}\times\boldsymbol{F}$$

几何上，向量积的模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 表示以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，如图 8-17 所示.

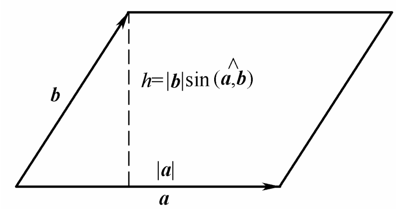

图 8-17

由向量积定义可得其运算性质：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$；

（2）$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

（3）结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$，其中 λ 是实数；

（4）分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

特别地，对于基本单位向量 $\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}$ ，有 $\begin{cases}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\end{cases}$ 于是对于向量 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$ ，我们有向量积的坐标表示式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

为了便于记忆，将 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示成三阶行列式的形式，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 时，可将三阶行列式按第一行展开.

又由向量积的坐标表示式知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 的充分必要条件是 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$ ，这也是 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件，即

$$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

例 8.7　设 $\boldsymbol{a}=(0,1,1),\boldsymbol{b}=(1,0,1)$ ，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

解

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\ .$$

例 8.8 已知ΔABC的顶点是$A(1,1,1)$，$B(0,1,0)$，$C(1,2,3)$，求ΔABC的面积.

解 由向量积定义知，ΔABC的面积为

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

因为$\overrightarrow{AB}=\{-1,0,-1\}$，$\overrightarrow{AC}=\{0,1,2\}$

所以 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&0&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6}\ .$$

练习题 8.2

1. $\boldsymbol{a}=(3,-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(p,-4,5)$，已知$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

2. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\neq 0$，$2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$垂直，$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$垂直，求$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

3. 非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共线，试证$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$的充要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

4. $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=2,(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$，求$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.

5. 已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

8.3 平面与直线

本节以向量知识为基础建立平面方程与空间直线方程，然后利用平面方程、直线方程研究平面、直线有关的问题.

8.3.1 平面的方程

1. 平面的点法式方程

由中学的立体几何知道，过空间一点作与已知直线垂直的平面是唯一的，即平面上一点和垂直于该平面的一个非零向量确定这个平面的位置，由此我们建立平面方程.

定义 8.2 与平面垂直的非零向量称为该平面的**法向量**.

显然，一个平面的法向量有无穷多个，法向量与平面上任意向量垂直．通常用 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 等来表示法向量．

设平面通过一定点 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$，向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)\neq\boldsymbol{0}$ 为它的一个法向量，如图 8-18，$M=(x,y,z)$ 是平面上任意一点，则 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ 在平面上，故 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{M_0M}$，于是由向量垂直的充要条件知

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

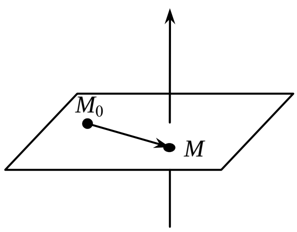

图 8-18

即

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{8.4}$$

称方程（8.4）为平面的点法式方程．

例 8.9　求过点 $M_0(1,-1,2)$，且与平面 π：$3x+y-z+1=0$ 平行的平面．

解　因为所求平面与平面 π 具有相同的法向量，于是可取平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\{3,1,-1\}$$

由（8.4）式得平面的点法式方程

$$3(x-1)+1(y+1)-(z-2)=0 .$$

即

$$3x+y-z=0 .$$

例 8.10　求过三点 $M_1(0,1,1)$，$M_2(1,2,3)$，$M_3(-2,0,3)$ 的平面方程．

解　因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,1,2),\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,-1,2)$

由向量积的定义知，向量积 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 与向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 及 $\overrightarrow{M_1M_3}$ 都垂直

故可选它为平面的一个法向量

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

故所求平面方程为

$$4(x-0)-6(y-1)+(z-1)=0，$$

即

$$4x-6y+z+5=0 .$$

2． 平面的一般式方程

平面的点法式方程（8.4）可变成三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 的形式．反之，对于任意的三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{8.5}$$

设 x_0, y_0, z_0 为该方程的一组解，则有

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \tag{8.6}$$

由方程（8.5）减去等式（8.6），得方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \tag{8.7}$$

方程（8.7）与方程（8.5）同解，所表示的几何图形相同．

又方程（8.7）与平面的点法式方程（8.4）一样，故方程（8.5）表示一个以 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为法向量的平面，并称方程（8.5）为平面的一般式方程．

特别地，对平面的一般式方程 $Ax+By+Cz+D=0$ ，有

（1）当 $D=0$ 时，平面通过坐标原点；

（2）当 $A=0$ 时，法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，即平面平行于 x 轴；

同理， $B=0$ 或 $C=0$ 时，平面平行于 y 轴或平面平行于 z 轴；

（3）当 $A=D=0$ 时，平面过坐标原点且平行于 x 轴，即平面通过 x 轴；

（4）当 $A=B=0$ 时，平面同时平行于 x 轴、 y 轴，即平面平行于面 xOy （或垂直于 z 轴）；

同理，$A=C=0$ 或 $B=C=0$ 时，则平面平行于面 zOx 或平行于面 yOz（垂直于 y 轴或垂直于 x 轴）；

（5）当 $A=B=D=0$ 时，方程即为 $z=0$ ，平面过原点且平行于面 xOy ，即平面为 xOy 坐标面；

同理，$x=0$ 或 $y=0$ 分别表示 yOz 坐标面或 zOx 坐标面．

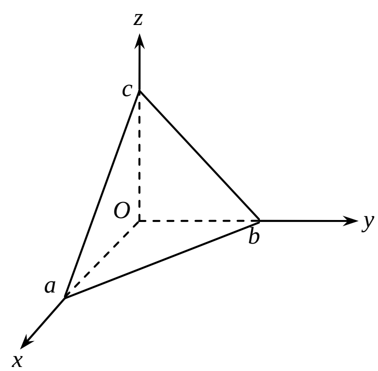

图 8-19

3． 平面的截距式方程

设平面在 x 轴, y 轴, z 轴上的交点分别为 $P(a,0,0)$, $Q(0,b,0)$, $R(0,0,c)$ $(abc\neq 0)$ ，如图 8-19，称 a, b, c 为平面在 x 轴, y 轴, z 轴上的截距, 利用平面的一般式方程，可得平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{8.8}$$

称方程（8.8）为平面的截距式方程．

8.3.2 直线的方程

1. 直线的点向式方程及参数方程

由立体几何知，过空间中一点作与已知直线平行的直线是唯一的，即直线上一点及与直线平行的某一向量确定这个直线的位置，由此我们建立直线方程.

定义 8.3 与直线平行的非零向量，称为直线的方向向量.

显然，一条直线的方向向量有无穷多个，且它们之间相互平行，方向向量与直线上的任意向量平行. 通常用 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$, $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 等来表示方向向量.

设直线过一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ，向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为它的一个方向向量，如图 8-20， $M(x,y,z)$ 是直线上任意一点，则 $\overrightarrow{M_0M}=\{x-x_0,y-y_0,z-z_0\}$ 在直线上，故 $\overrightarrow{M_0M}\parallel\boldsymbol{s}$ ，于是由向量平行的充要条件知

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{8.9}$$

称方程（8.9）为直线的点向式方程（又称对称式方程）.

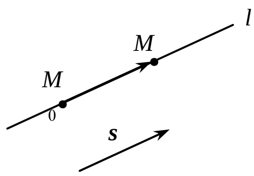

图 8-20

如果引入变量 t ，令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$ ，则有

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{8.10}$$

称方程组（8.10）为直线的参数式方程，t 为参数.

注意：（1）由直线的点向式方程，容易得到直线的方向向量和通过的一点.

（2）由直线的参数式方程，根据不同的参数值，可确定直线上不同的点.

2. 直线的一般式方程

由于空间直线可看作某两个平面的交线，故两个相交平面 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 确定一条直线，其方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{8.11}$$

其中系数 A_1,B_1,C_1 与 A_2,B_2,C_2 不成比例.

称方程组（8.11）为直线的一般式方程.

注意：直线的点向式方程与一般式方程可以相互转化，将点向式方程中的两个等式联立，可得直线的一般式方程，从直线的一般式方程中只要确定直线的方向向量和直线上的一点，就能将一般式方程转化成点向式方程.

例 8.11 将直线 l 的一般方程 $\begin{cases} 3x-2y+z+1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 化为点向式方程和参数方程.

解 解法一：先在直线 l 上找一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，取 $x_0=0$，将 $M_0(0,y_0,z_0)$ 代入直线 l 的一般方程得 $\begin{cases} -2y_0+z_0+1=0 \\ y_0-z_0-2=0 \end{cases}$，解出 $y_0=-1$, $z_0=-3$.

则点 $(0,-1,-3)$ 在直线 l 上.

又因为直线 l 与两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(3,-2,1)$, $\boldsymbol{n}_2=(2,1,-1)$ 垂直，故可取直线 l 的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

所以，所求直线 l 的点向式方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z+3}{7}$.

解法二：从所给方程组 $\begin{cases} 3x-2y+z+1=0 \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ 中分别消去变量 y, z，得

$$7x-z-3=0 \text{ 和 } 5x-y-1=0$$

上两式可变形为 $x=\dfrac{z+3}{7}$ 和 $x=\dfrac{y+1}{5}$.

于是直线 l 的点向式方程为 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z+3}{7}$.

由此可得出参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=-1+5t \\ z=-3+7t \end{cases}$（$t$ 为参数）.

8.3.3 平面方程与直线方程的应用

1. 平面与平面的位置关系

设平面 π_1, π_2 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$, $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，则

（1）$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \parallel \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

（2）$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

（3）若平面 π_1 与 π_2 斜交（两个非重合的平面既不平行又不垂直，称为两个平面**斜交**），如图 8-21 所示，设它们的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 与 $\boldsymbol{n}_2$ 的夹角为 θ_1，则两平面 π_1 与

π_2 的夹角 θ 为 θ_1 或补角 $\pi-\theta_1$ 中的锐角，于是

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

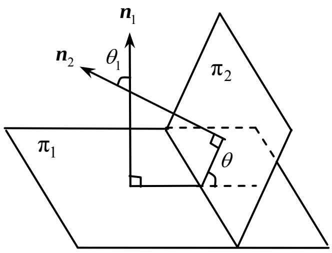

图 8-21

例 8.12　求平面 $\pi_1: x+y-2z-1=0$ 和 $\pi_2: 2x-y-z-2=0$ 的夹角.

解　由两平面夹角公式得

$$\cos\theta=\frac{|1\times2+1\times(-1)+(-2)\times(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

所以，两平面夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

2. 直线与直线的位置关系

设两直线 L_1,L_2 的方程为别为 $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，它们的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，则

（1）$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \parallel \boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$；

（2）$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

（3）若直线 L_1 与 L_2 斜交，设它们的夹角为 θ，则 θ 为它们的方向向量 $\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 的夹角 θ_1 或补角 $\pi-\theta_1$ 中的一个锐角，即

$$\cos\theta=|\cos\theta_1|=\frac{|\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

例 8.13　已知两直线方程分别为 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$，$L_2:\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$，求 L_1 与 L_2 间的夹角 θ.

解　直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{s}_2=(3,1,-1)$

由两直线夹角公式知， $\cos\theta=\dfrac{|1\times 3+(-1)\times 1+3\times(-1)|}{\sqrt{1^2+0^2+3^2}\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{11}$

所以 L_1 与 L_2 间的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{11}$.

3. 直线与平面的位置关系

设直线 L ，平面 π 的方程分别为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ ， $Ax+By+Cz+D=0$. 它们的方向向量和法向量分别为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p),\ \boldsymbol{n}=(A,B,C)$ ，则

（1） $L\parallel\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$ ；

（2） $L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$ ；

（3）若直线 L 与平面 π 斜交，直线 L 与平面 π 的夹角为直线 L 与它在平面 π 上的投影直线 l 的夹角 $\varphi\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$. 设 θ 为直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 与平面法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角，如图 8-22，则

$$\begin{aligned}\sin\varphi=|\cos\theta|&=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{s}|}\\&=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .\end{aligned}$$

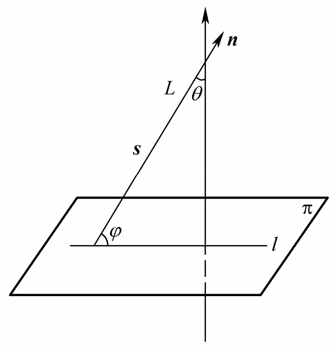

图 8-22

例 8.14 求过点 $M(-1,2,1)$ 且平行于两平面 $\pi_1:5x-3y+z-1=0$ ， $\pi_2:3x-2y+z-1=0$ 的直线 L 的方程.

解 因为平面 π_1 , π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=\{5,-3,3\},\boldsymbol{n}_2=\{3,-2,1\}$ ， 且 $L\parallel\pi_1$, $L\parallel\pi_2$

所以可取直线 L 的方向向量为

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3i + 4j - k$$

于是所求直线 L 的方程为 $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-1}{-1}$.

4. 点到平面的距离公式

设平面 π 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面外的一点，如图 8-23，在平面 π 上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ，则向量

$$\overrightarrow{P_1P_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$$

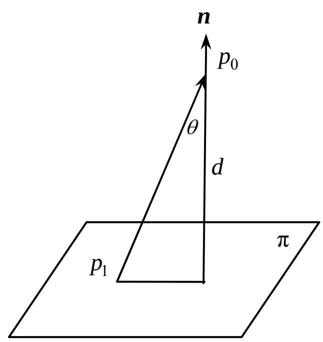

图 8-23

设 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与平面 π 的法向量 $n = (A, B, C)$ 的夹角为 θ ，则点 P_0 到平面 π 的距离 d 为

$$d = \left| \left| \overrightarrow{P_1P_0} \right| \cos\theta \right|$$

又由

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{P_1P_0} \cdot n}{\left| \overrightarrow{P_1P_0} \right| |n|}$$

得

$$d = \frac{\left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot n \right|}{|n|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} .$$

又 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面 π 上，所以

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$

代入上式，得点 P_0 到平面 π 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

另外，由点到平面的距离公式可以计算出两平行平面的距离.

设平面 π_1 平行于平面 π_2，其方程分别为 $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 为平面 π_1 上任意一点，则点 M_0 到平面 π_2 的距离 d 即为平面 π_1 与平面 π_2 间的距离 d，于是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

又点 $M_0=\{x_0,y_0,z_0\}$ 在平面 π_1 上，故 $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$

所以两平行平面 π_1,π_2 间的距离 $d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

例 8.15　求点 $M(0,2,1)$ 到平面 $2x-y+z-1=0$ 的距离.

解　由点到平面的距离公式可知 $d=\dfrac{|2\times0-1\times2+1\times1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

练习题 8.3

1. 求过 $(1,2,1)$ 且垂直于两平面 $x+y=0$，$5y+z=0$ 的平面方程.
2. 求过点 $M_0(2,4,0)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2z-1=0\\y-3z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程.
3. 求过点 $M_1(1,2,0)$、$M_2(3,7,-3)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{s}=(-2,-1,1)$ 的平面方程.
4. 直线 $x-1=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{\lambda}$ 垂直于平面 $3x+6y+3z+25=0$，求 λ .
5. 求通过直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+3}{4}$ 且平行于直线 $x=y=\dfrac{z}{2}$ 的平面方程.
6. 求点 $(1,2,3)$ 到直线 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{-3}=\dfrac{z-3}{-2}$ 的距离.
7. 求 k，使平面 $x+ky-2z=9$ 与平面 $2x+4y+3z=3$ 垂直.
8. 求经过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.
9. 将直线方程 $\begin{cases}x+y=0\\2x+y=0\end{cases}$ 化成点向式方程.
10. 求过点 $P(3,1,-2)$ 和直线 $L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-3}$ 的平面方程.
11. 求过点 $P_0(2,1,-1)$ 且在下 x 轴和 y 轴上截距分别为 2 和 1 的平面方程.
12. 求过点 $M_1(3,-2,1)$ 与 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

13．求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 间的夹角.

14．求直线 $L:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 与平面 $\pi:2x+y+z-6=0$ 的夹角 .

8.4 曲面与曲线

本节介绍曲面及其方程，研究曲面的形状和特征，着重介绍一些常见的二次曲面，最后讨论空间曲线及其方程.

8.4.1 几种常见的曲面及其方程

空间中的曲面可以看作是按一定规律运动的点的轨迹，由于空间中的点要用有序三元数组 (x, y, z) 确定它的位置，因此用于描述空间中点的运动轨迹的方程为三元方程 $F(x,y,z)=0$.

定义 8.4 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 满足下列条件：

（1）曲面 S 上任意点的坐标一定都满足三元方程 $F(x,y,z)=0$ ；

（2）不在曲面 S 上的点的坐标一定都不满足三元方程 $F(x,y,z)=0$.

则称三元方程 $F(x,y,z)=0$ 为曲面 S 的方程，曲面 S 是三元方程 $F(x,y,z)=0$ 的几何图形.

1．球面

在空间直角坐标系中，到一个定点的距离等于定长的点的集合称为球面．定点称为球心，定长称为球面半径.

若球心为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ，半径为 R ， $M(x,y,z)$ 为球面上任意一点，则 $|M_0M|=R$ ，即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \tag{8.12}$$

这就是球面方程.

容易验证，球面上的点都满足方程（8.12），不在球面上的点都不满足方程（8.12）.

一般地，三元二次方程 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 表示球心为 $\left(-\dfrac{A}{2},-\dfrac{B}{2},-\dfrac{C}{2}\right)$，半径为 $R=\dfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ $(A^2+B^2+C^2-4D>0)$ 的球面，该方程称为球面的一般方程.

2．柱面

设有一条定曲线 C 和定直线 l ，现有一条动直线 L 平行定直线 l ，并沿定曲线 C 平行移动，这条动直线 L 所形成的曲面称为柱面，其中定曲线 C 称为柱面的准

线，动直线 L 称为柱面的母线，如图 8-24 所示.

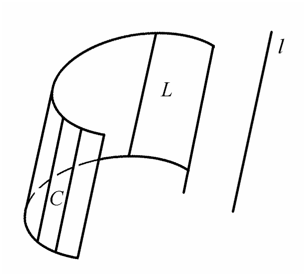

图 8-24

这里侧重讨论母线平行于坐标轴的柱面.

设柱面的准线是 xOy 面上的曲线 $C:F(x,y)=0$，母线平行于 z 轴，如图 8-25 所示. 对于柱面上任意一点 $M(x,y,z)$，过 M 作与 z 轴平行的直线，交曲线 C 于点 $M_1(x,y,0)$，由于 M_1 在曲线 C 上，故坐标 x , y 满足二元方程 $F(x,y)=0$，而过一个不在柱面上的点作与 z 轴平行的直线，则该直线与曲线 C 无交点，其坐标自然也不满足二元方程 $F(x,y)=0$，因此，由曲面方程的定义知，二元方程 $F(x,y)=0$ 表示一个以 xOy 面上的曲线 $C:F(x,y)=0$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面. 显然，柱面的形状依赖于准线的形状.

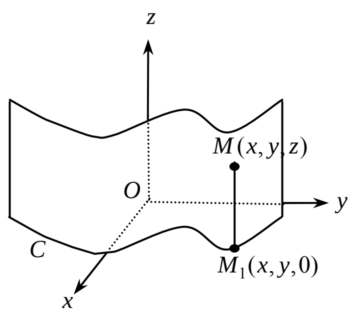

图 8-25

类似地，以 yOz 面上的曲线 $G(y,z)=0$ 为准线，母线平行于 x 轴的柱面方程为 $G(y,z)=0$，以 zOx 面上的曲线 $H(x,z)=0$ 为准线，母线平行于 y 轴的柱面方程为 $H(x,z)=0$.

例如，$z^2=2x$ 表示以 zOx 上的抛物线 $z^2=2x$ 为准线，母线平行于 y 轴的抛物柱面；$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示以 yOz 上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 为准线，母线平行于 x 轴的双曲柱面；特别地，$x+y=1$ 表示准线为 xOy 面上的直线 $x+y=1$，母线平行于 z 轴的柱面，也即平面.

3. 旋转曲面

一条曲线 C 绕一条定直线 l 旋转一周所成的曲面称为旋转曲面，曲线 C 叫做旋转曲面的母线，定直线 l 叫做旋转曲面的轴（或旋转轴）.

我们主要讨论母线是坐标面上的平面曲线，旋转轴是该坐标面上的一条坐标轴的旋转曲面.

设旋转曲面 S 的母线是 yOz 面上的平面曲线 C，它的方程为

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases},$$

把此曲线绕 z 轴旋转一周，就得到一个以 z 轴为旋转轴的旋转曲面，如图 8-26 所示.

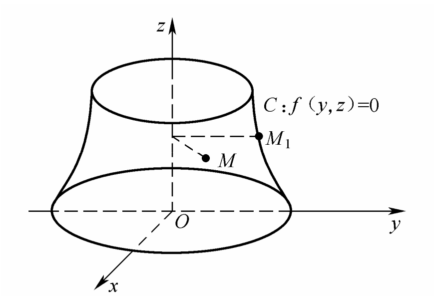

图 8-26

设 $M_1(0,y_1,z_1)$ 为曲线上任意一点，则有

$$f(y_1,z_1)=0$$

当曲线 C 绕 z 轴旋转时，点 M_1 也绕 z 轴旋转到另一点 $M(x,y,z)$，这时 $z=z_1$ 保持不变，且点 M 到 z 轴的距离 d 恒等于 $|y_1|$，又 $d=\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，于是 $f(y_1,z_1)=0$ 即为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

由此可知，曲线 C 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面方程即为将 $f(y,z)=0$ 中的变量 z 保持不变，将 y 代以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 所得.

同理，曲线 C 绕 y 轴旋转所得的曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$$

其他坐标面上的曲线绕该坐标面上的一个坐标轴旋转所成的旋转曲面的方程也可用此方法得到.

例 8.16　将 yOz 坐标面的直线 $z=ay(a>0)$ 绕 z 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

解　方程 $z=ay$ 中的变量 z 不变，y 代以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得到所生成的旋转曲面

的方程为 $z=\pm a\sqrt{x^2+y^2}$

或

$$z^2=a^2(x^2+y^2)\text{（图形为圆锥面，如图 8-27 所示）}.$$

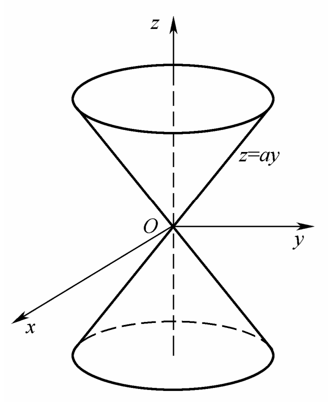

图 8-27

例 8.17 求 yOz 坐标面上的抛物线 $z=\dfrac{y^2}{p^2}$ 绕 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解 方程 $z=\dfrac{y^2}{p^2}$ 中的变量 z 不变，y 代以 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得到所生成的旋转曲面的方程为 $z=\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{p^2}$

或

$$z=\frac{1}{p^2}(x^2+y^2)\text{（图形为旋转抛物面，如图 8-28 所示）}.$$

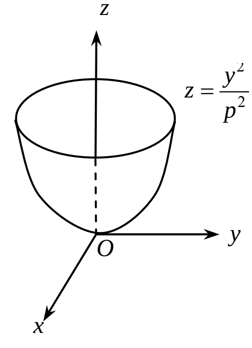

图 8-28

例 8.18 求 yOz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 y 轴、z 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程.

解 由平面曲线绕某轴旋转所生成的旋转曲面方程中该坐标所对应的变量不变，得绕 y 轴旋转所生成的曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$（图形为旋转单叶双曲面，如图 8-29 所示）；

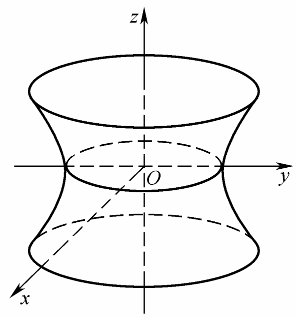

图 8-29

绕 z 轴旋转所生成的旋转曲面的方程为

$$-\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$（图形为旋转双叶双曲面，如图 8-30）.

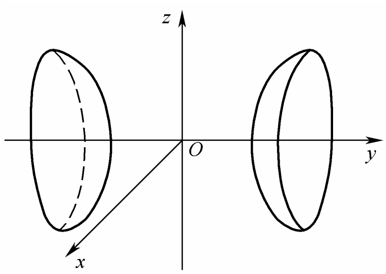

图 8-30

4. 二次曲面

三元二次方程表示的曲面称为二次曲面．由于平面方程是一次的，所以平面也称称作一次曲面.

（1）圆锥面与椭圆锥面

方程 $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ （$a>0,b>0$,且 $a\neq b$ ）所表示的曲面为椭圆锥面，用垂直

于 z 轴的平面去截曲面（除 xOy 面外），得到的交线都是椭圆，图形类似于图 8-27，当 $a=b$ 时，椭圆锥面就是圆锥面.

（2）椭球面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（$a>0,b>0,c>0$ 且 $a\neq b\neq c$）所表示的曲面为椭球面，如图 8-31 所示，用垂直于坐标轴的平面去截椭球面（除端点点外），交线都是椭圆.

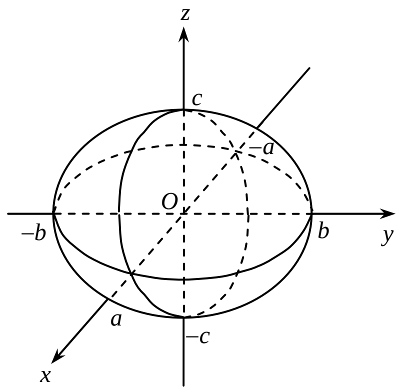

图 8-31

当 $a=b=c$ 时，方程即为球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$，可见，球面是椭球面的特例.

（3）双曲面

方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为单叶双曲面，形状类似于图 8-29，用垂直于 x 轴、y 轴的平面去截曲面，得到的交线都是双曲线.

方程 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所表示的曲面称为双叶双曲面，形状类似于图 8-30.

（4）椭圆抛物面

方程 $z=\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}$（$p,q$ 同号，且 $p\neq q$）所表示的曲面称为椭圆抛物面，其形状类似于图 8-28，用垂直于 z 轴的平面去截曲面（除端点外），交线都是椭圆.

8.4.2 空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般式方程

类似于空间直线，空间曲线可看作某两个曲面的交线，故两个相交曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 确定一条曲线，其方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{8.13}$$

称方程组（8.13）为空间曲线的一般式方程.

例如，旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与圆柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线方程为

$$\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

它表示在平面 $z=1$ 上的单位圆 $x^2+y^2=1$.

2. 空间曲线的参数方程

类似空间直线的参数方程，空间曲线也可以用参数方程表示.

一般地，空间曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t)\ (a\leqslant t\leqslant \beta) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{8.14}$$

对于给定的 $t=t_0$，对应于曲线上的一点 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$，当 t 在 $[a,\beta]$ 上变化时，点 $M(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 也在曲线上变动，且跑遍曲线上所有的点，因此（8.14）式表示该曲线.

3. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{8.15}$$

过曲线 C 上每一点作 xOy 面的垂线，这些垂线形成了一个母线平行于 z 轴且通过曲线 C 的柱面，称这个柱面为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面. 此柱面与 xOy 的交线称为曲线 C 在 xOy 面上的投影（曲线）.

方程组（8.15）中消去变量 z，得方程

$$H(x,y)=0 \tag{8.16}$$

它表示母线平行于 z 轴且包含曲线 C 的柱面，因此（8.16）式表示曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面的方程. 于是曲线 C 在 xOy 面上的投影方程为

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

同理，从曲线 C 的方程（8.15）中消去变量 x 或 y，得到方程：$R(y,z)=0$ 或 $T(x,z)=0$，它们分别为曲线 C 关于 yOz 面和 zOx 面的投影柱面方程，因此

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

分别是曲线 C 在 yOz 面和 zOx 面上的投影（曲线）方程.

例 8.19　求曲线Γ：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=1 \end{cases}$关于 xOy 面的投影柱面及投影方程.

解　方程组$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=1 \end{cases}$中消去变量 z，即得曲线Γ关于 xOy 面的投影柱面方程 $x^2+y^2=1$（图形为圆柱面）.

于是曲线Γ在 xOy 面的投影方程为$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

练习题 8.4

1. 求方程 $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z+5=0$ 的球心和球面半径.
2. 求曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转曲面方程.
3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x-z+3=0 \end{cases}$在 xOy 面上的投影柱面方程.
4. 已知一条直径的两个端点为 $(2,-3,5)$ 和 $(4,1,-3)$，求此球面方程.
5. 指出下列方程在空间直角坐标系下都表示什么曲面？

（1）$x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$；　　（2）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=z$；

（3）$x^2-\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$；　　（4）$x^2+y^2-\dfrac{z^2}{9}=0$；

（5）$x^2-y^2+1=0$；　　（6）$x^2-y^2+2z=0$.

习题八

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\{1,1,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,1\}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.
2. 已知 $\boldsymbol{a}=\{2,1,-1\}$，$\boldsymbol{b}=\{1,-1,2\}$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.
3. 求过点 $(-2,-2,2)$，点 $(1,1,-1)$，点 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.
4. 设平面通过点 $(5,-7,4)$，且在三坐标轴上截距相等，求此平面方程.
5. 将直线 l 的一般方程$\begin{cases} 2x-y-z+3=0 \\ 3x+4y-z-2=0 \end{cases}$化为点向式方程与参数方程.
6. 求过点 $(1,2,-1)$，且与直线 $\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z+1}{1}$ 垂直的平面方程.
7. 求过点 $(3,0,-1)$，且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

8. 已知直线 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$ 和 L_2：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程.

9. 求过点 $(0,2,4)$，且与两个平面 π_1：$x+y-2z-1=0$ 和 π_2：$x+2y-z+1=0$ 都平行的直线方程 .

10. 求两直线 $\begin{cases}x+2y+z-1=0\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x-y-z-1=0\\x-y+2z+1=0\end{cases}$ 间的夹角.

11. 求直线 $\begin{cases}x+y+3z=0\\x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$ 间的夹角.

12. 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离 .

13. 求过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$ 的平面方程.

14. 求过点 $(1,0,0),(0,-1,0)$ 和 $(0,0,1)$ 的平面.

15. 过点 $(-1,2,1)$，且平行于直线 $\begin{cases}x+y-2z-1=0\\x+2y-z+1=0\end{cases}$ 的直线方程.

16. 求过点 $(3,-2,1)$ 和点 $(-1,0,2)$ 的直线方程.

17. 三元二次方程 $x^2+y^2+z^2-4y-2z-4=0$ 表示什么图形？

18. 求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 xOy 面上的投影方程.

19. 下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形？

（1） $x=2$；　（2） $\begin{cases}y-5x+1=0\\y+2x-3=0\end{cases}$；

（3） $x^2+y^2=1$.