第 4 章　函数的积分

本章将讨论一元函数积分学．积分学中主要有两个基本问题：不定积分和定积分．围绕这两个问题，本章首先从积分定义、有关定理和基本公式入手，然后重点解析其计算方法，最后讲解微积分的应用．

4.1　不定积分的概念

4.1.1　原函数与不定积分

有许多实际问题都要求我们解决微分的逆运算，即已知某函数的导数去求原来的函数．

例如，已知自由落体任意时刻 t 的运动速度 $v(t)=gt$，求落体的运动规律（设运动开始时，物体在原点）．这个问题就是要从关系式 $s'(t)=gt$ 中还原出函数 $s(t)$ 来．由导数公式易知，$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$，这就是所求的运动规律．

一般地，如果已知 $F'(x)=f(x)$，如何求 $F(x)$ 呢？为此，引入下述定义：

定义 4.1（原函数）已知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果存在函数 $F(x)$，使得在区间 I 上任意点 x 处都有关系式 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$ 成立，则称函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数．

例如，因为 $(\sin x)'=\cos x$，故 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的一个原函数，但不是唯一的．事实上 $(\sin x+1)'=(\sin x+2)'=(\sin x-\sqrt{3})'=\cdots=\cos x$，所以 $\cos x$ 的原函数不是唯一的．

关于原函数的两个问题：

（1）原函数存在问题：如果 $f(x)$ 在某区间内连续，那么它的原函数一定存在．（此定理将在定积分部分加以说明）

（2）原函数的一般表达式：前面已指出，若 $f(x)$ 存在原函数，就不是唯一的，那么这些原函数之间有什么差异？能否写成统一的表达式呢？对此，有如下结论：

定理 4.1 若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$（C 为任意常数）都是函数 $f(x)$ 的原函数，并且 $f(x)$ 的任何一个原函数都可表示成 $F(x)+C$．

证明：$\because (F(x)+C)'=F'(x)+C'=f(x)$，

$\therefore F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数．

又设 $f(x)$ 的任意一个原函数为 $G(x)$，则 $G'(x)=f(x)$．

$\because (G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$．

$\therefore G(x)-F(x)=C$（C 为任意常数）．

即 $G(x)=F(x)+C$．

这样就证明了 $f(x)$ 的全体原函数组成了函数族 $F(x)+C$，由此构成不定积分的概念．

定义 4.2（不定积分）设函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$（C 为任意常数），称为 $f(x)$ 的不定积分，记为：$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$.

上式中 x 叫做积分变量，$f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，C 叫做积分常数，“$\int$ ”叫做积分号.

注意：求 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 时，切记要“$+C$”，否则求出的只是一个原函数，而不是不定积分.

例 4.1　求下列不定积分：

（1）$\int 2x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int \sin x\mathrm{d}x$；　　（3）$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\because (x^2)' = 2x$，$\therefore \int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$.

（2）$\because (-\cos x)' = \sin x$，$\therefore \int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

（3）$\because x>0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，又 $x<0$ 时，$[\ln(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$，

即 $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.　　$\therefore \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$.

通常把一个原函数 $F(x)$ 的图像称为 $f(x)$ 的一条积分曲线，其方程为 $y=F(x)$，因此，不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上就表示全体积分曲线所组成的曲线族，它们的方程为 $y=F(x)+C$. 这族曲线的特点是：积分曲线族 $y=F(x)+C$ 可以由其中任一条积分曲线 $y=F(x)$ 上、下平移而成，并且该曲线族在横坐标相同点 x 处切线斜率都等于 $f(x)$，即在该处各积分曲线的切线彼此平行，如图 4-1 所示.

例 4.2　设曲线过点(1,2)且斜率为 $2x$，求曲线方程.

解：设所求曲线方程为 $y=f(x)$，则 $y'=2x$，故 $y=\int 2x\mathrm{d}x = x^2 + C$.

又由曲线过点(1,2)得，$2 = 1^2 + C$，所以 $C=1$，于是所求方程为 $y = x^2+1$，如图 4-2 所示.

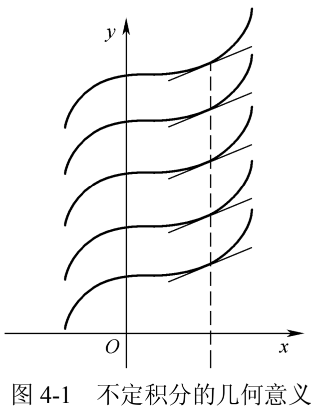

图 4-1　不定积分的几何意义

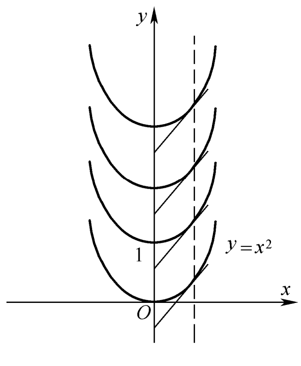

图 4-2　$y=x^2+1$ 的图形

由积分定义知，积分与导数（或微分）互为逆运算，由此得出下列性质：

（1）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)$ 或 $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$；

（2）$\int F'(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$ 或 $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$.

4.1.2 基本积分公式

利用导数求积分是一种间接的方法，很不方便，下面的基本积分公式及运算性质可以帮助我们直接进行积分计算．由于求不定积分是求导数（或微分）的逆运算，所以反着导数公式可以得到相应的基本积分公式：

1	$(kx)' = k$	$\int k\mathrm{d}x = kx + C$（$k$ 为常数）
2	$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = x^{\alpha}$	$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$（$\alpha \neq -1$）
3	$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + C$
4	$\left(\frac{1}{\ln a}a^{x}\right)' = a^{x}$	$\int a^{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$
5	$(\mathrm{e}^{x})' = \mathrm{e}^{x}$	$\int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$
6	$(-\cos x)' = \sin x$	$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
7	$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$
8	$(\tan x)' = \sec^{2} x$	$\int \sec^{2} x\mathrm{d}x = \tan x + C$
9	$(-\cot x)' = \csc^{2} x$	$\int \csc^{2} x\mathrm{d}x = -\cot x + C$
10	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C$
11	$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^{2}}$	$\int \frac{1}{1+x^{2}}\mathrm{d}x = \arctan + C$

以上 11 个公式是积分法的基础，必须熟记．

定理 4.2 被积函数中不为零的常数因子可提到积分号外面来，即

$$\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x \quad (k \neq 0).$$

定理 4.3 两个函数代数和（或差）的积分等于各函数积分的代数和（或差），即

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x .$$

上述两定理可推广为：

$$\int [af(x) \pm bg(x)]\mathrm{d}x = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)\mathrm{d}x .$$

说明：（1）本性质对有限多个函数的和也是成立的．它表明：和函数可逐项积分．

（2）这两个公式的证明很容易，只要验证右端的导数等于左端的被积函数，并且右端确含一个常数 C 即可．顺便指出，以后我们计算不定积分时，就可以用这个方法检验积分结果是否正确了．

4.1.3　公式应用举例

对于不定积分的计算如果可以利用各种恒等变形使被积函数化为和差形式，并且每一项都是基本积分公式中所具有的形式，就可以利用积分公式和性质直接积分，这种积分法称为直接积分法.

例 4.3　求下列不定积分：

（1）$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+3\tan^2 x\right)\mathrm{d}x$；　（2）$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；

（3）$\int 3^x \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$；　（4）$\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；

（5）$\int(x+2)^2\mathrm{d}x$；　（6）$\int \mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^2}+3\tan^2 x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x-2\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+3\int\tan^2 x\mathrm{d}x$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x-2\int x^{-2}\mathrm{d}x+3\int(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x=2\sqrt{x}+\frac{2}{x}+3\tan x-3x+C.$$

注意：在分项积分后，不必每一个积分结果都“$+C$”，只要在总的结果中加一个C就行了.

（2）$\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$.

（3）$\int 3^x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int(3\mathrm{e})^x\mathrm{d}x=\frac{(3\mathrm{e})^x}{\ln 3\mathrm{e}}+C=\frac{3^x\mathrm{e}^x}{\ln 3+1}+C$.

（4）$\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x=\int(2^{2x}+2\cdot 2^x\cdot 3^x+3^{2x})\mathrm{d}x$

$$=\int 4^x\mathrm{d}x+2\int 6^x\mathrm{d}x+\int 9^x\mathrm{d}x=\frac{4^x}{\ln 4}+2\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C.$$

（5）$\int(x+2)^2\mathrm{d}x=\int(x^2+2x+4)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C_1=\frac{1}{3}(x+2)^3+C$.

（6）$\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^5)^x\mathrm{d}x=\frac{(\mathrm{e}^5)^x}{\ln\mathrm{e}^5}+C=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+C$.

习题 4.1

1．填空题

（1）$x^2+\sin x$ 的一个原函数是________，而________的原函数是 $x^2+\sin x$；

（2）$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=$________；$\int \mathrm{d}f(x)=$________；

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=$________；$\int f'(x)\mathrm{d}x=$________；

（3）通过点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{2}\right)$的积分曲线 $y=\int\cos x\mathrm{d}x$ 的方程是________.

2．选择题

（1）函数 $f(x)$ 的（　　）原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分.

A．任意一个　　B．所有　　C．唯一　　D．某一个

（2）若 $F(x)$、$G(x)$ 均为 $f(x)$ 的原函数，则下式不正确的是（　　）.

A．$G'(x)=f(x)$　　B．$F'(x)-G'(x)=0$

C．$F'(x)-G'(x)=f(x)$　　D．$F(x)-G(x)=C$（C 为任意常数）

（3）$\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos 2x+C$，则 $f(x)=$（　　）.

A．$\mathrm{e}^x(\cos 2x-2\sin 2x)$　　B．$\mathrm{e}^x(\cos 2x-2\sin 2x)+C$

C．$\mathrm{e}^x\cos 2x$　　D．$-\mathrm{e}^x\sin 2x$

3．求下列不定积分：

（1）$\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\sin x+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$；　　（2）$\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（3）$\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　　（4）$\int\frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$；

（5）$\int(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})^2\mathrm{d}x$；　　（6）$\int\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int\sec x(\sec x-\tan x)\mathrm{d}x$；　　（8）$\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

4.2　不定积分的计算

利用积分公式与性质，只能求出一些简单的积分，对于比较复杂的积分，我们总是设法把它变形使之成为能利用基本积分公式的形式，再求出其积分．下面讲解的换元法就是最常用的一种很有效的方法.

4.2.1　换元积分法

在例 4.3 的（5）、（6）两例中，我们不难发现，

$$\int(x+2)^2\mathrm{d}x=\int(x+2)^2\mathrm{d}(x+2)=\frac{1}{3}(x+2)^3+C，$$

$$\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int\mathrm{e}^{5x}\mathrm{d}(5x)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x}+C.$$

即只要把 $(x+2)$、$(5x)$ 看成公式 $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$（$\alpha\neq-1$）、$\int\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$ 中的 x 即可得出结果．此方法的理论基础源于下述定理：

定理 4.4　如果 $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，则 $\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C.$

其中 $u=\varphi(x)$ 是 x 的任一可导函数.

证明　$\because\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$，$\therefore\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x.$ 又根据微分形式不变性，则有：$\mathrm{d}F(u)=f(u)\mathrm{d}u$，其中 $u=\varphi(x)$ 是 x 的可导函数，由此得：

$$\int f(u)\mathrm{d}u=\int\mathrm{d}F(u)=F(u)+C.$$

积分步骤如下：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\text{凑微分}]{\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(x)} \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x) \xlongequal[\text{积分}]{} F[\varphi(x)]+C .$$

该公式说明，在被积函数（一般为复合函数）中选择适当的中间变量$u=\varphi(x)$，凑成微分$\mathrm{d}\varphi(x)$，再将该中间变量看成相应公式中的x，就可得出积分结果．通常把这种积分方法称为凑微分法或第一换元法．

凑微分法的难点在于原题并未指明应该把哪一部分凑成$\mathrm{d}\varphi(x)$，这需要解题经验，熟记下列凑微分形式，解题中会给我们以下启示：

（1）$\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)$（$a\neq 0$）　（2）$x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}x^2$

（3）$x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x^3$　（4）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}\sqrt{x}$

（5）$\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$　（6）$\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}\ln x$

（7）$\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\mathrm{e}^x$　（8）$\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$

（9）$\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\sin x$　（10）$\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}\tan x$

（11）$\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$　（12）$\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\mathrm{d}\arctan x$

（13）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\mathrm{d}\arcsin x$

例 4.4　求下列不定积分：

（1）$\int\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t$；　（2）$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；　（3）$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x$；

（4）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$；　（5）$\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$．

解：（1）$\int\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\omega}\int\sin(\omega t+\varphi)\mathrm{d}(\omega t+\varphi)=-\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega t+\varphi)+C$．

（2）$\int 2x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{x^2}\cdot 2x\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x^2=\mathrm{e}^{x^2}+C$．

（3）$\int\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{1}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}x^3=\dfrac{1}{3}\int\dfrac{1}{\sqrt{x^3-1}}\mathrm{d}(x^3-1)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3-1}+C$．

（4）$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\int\dfrac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\mathrm{d}\ln x=\arcsin\ln x+C$．

（5）$\int\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$．

例 4.5　求下列不定积分：

（1）$\int\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）；　（2）$\int\dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a\neq 0$）；

（3）$\int\tan x\mathrm{d}x$；　（4）$\int\sec x\mathrm{d}x$．

解：（1）$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\arcsin\frac{x}{a}+C$．

类似地，有：$\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$（$a\neq 0$）．

（2）$\int \frac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{\mathrm{d}(a+x)}{a+x}-\int\frac{\mathrm{d}(a-x)}{a-x}\right]$

$$=\frac{1}{2a}[\ln|a+x|-\ln|a-x|]+C=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C .$$

类似地，有：$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$．

（3）$\int \tan x\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}\cos x=-\ln|\cos x|+C$．

类似地，有：$\int \cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$．

（4）$\int \sec x\mathrm{d}x=\int\frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}x$

$$=\int\frac{1}{\sec x+\tan x}\cdot(\sec^2 x\mathrm{d}x+\sec x\tan x\mathrm{d}x)$$

$$=\int\frac{1}{\sec x+\tan x}\mathrm{d}(\sec x+\tan x)=\ln|\sec x+\tan x|+C .$$

类似地，有：$\int \csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$．

注意：本题 8 个积分以后会经常用到，可以作为公式应用．

例 4.6 求下列不定积分：

（1）$\int\frac{3+x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$； （2）$\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$； （3）$\int\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$．

解：（1）$\int\frac{3+x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=3\int\frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}(4-x^2)$

$$=3\arcsin\frac{x}{2}-\sqrt{4-x^2}+C .$$

（2）$\int\frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+2)(x-1)}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}(\ln|x-1|-\ln|x+2|)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C .$$

（3）$\int\frac{1}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(\sqrt{3})^2+(x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$．

形如$\int\frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}$可以采用分解因式折分法或配方法．顺便指出配方法也可运用于形如$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$的积分．

例 4.7　求下列不定积分：

（1）$\int \cos^2 x \sin x \mathrm{d}x$；　　（2）$\int \sin^2 x \mathrm{d}x$.

解：（1）$\int \cos^2 x \sin x \mathrm{d}x = -\int \cos^2 x \mathrm{d}\cos x = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

（2）$\int \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}(2x)\right]$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

注意：三角函数中其他常用公式有倍角公式、半角公式、平方关系、倒数关系等.

第一换元法是将中间变量 $\varphi(x)$ 看成相应公式中的 x，直接得出积分结果，但对有些被积函数则需要作相反方式的换元，即将积分变量 x 看成 $\varphi(t)$（$x=\varphi(t)$），使被积函数有理化，再用第一换元法积分.

定理 4.5　如果 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，且 $x=\varphi(t)$ 单调可导，$\varphi'(t)\neq 0$，其反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在，那么 $\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)] + C$.

证明：因为 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 具有原函数 $F(t)$，所以 $F'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

令 $H(x) = F[\varphi^{-1}(x)]$，利用复合函数求导法则及反函数求导公式得到：

$$H'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = F'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x),$$

即 $H(x) = F[\varphi^{-1}(x)]$ 是 $f(x)$ 的原函数，所以有：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

定理 4.5 给出的换元法称为第二换元法，其计算步骤为：

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t]{\text{令}x=\varphi(t)} \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t) + C \xlongequal{t=\varphi^{-1}(x)} F[\varphi^{-1}(x)] + C.$$

即基本步骤为：换元、积分、回代.

例 4.8　求下列不定积分：

（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+1}$；　　（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

解：（1）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-1}+1} \xlongequal[x=t^2+1]{\text{令}t=\sqrt{x-1}} \int \frac{\mathrm{d}(t^2+1)}{t+1} = \int \frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t = 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$

$$= 2(t - \ln|t+1|) + C \xlongequal{\text{回代}} 2(\sqrt{x-1} - \ln|\sqrt{x-1}+1|) + C.$$

（2）$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \xlongequal[x=t^6]{\text{令}t=\sqrt[6]{x}} \int \frac{\mathrm{d}t^6}{t^3+t^2} = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|\right) + C$$

$$\xlongequal{\text{回代}} 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

注意：如果被积函数中含有被开方因式为一次根式 $\sqrt[n]{ax+b}$ 时，通常令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$，称为

根式代换．其主要思想是利用根式代换消去根号，使其转化为有理式的积分．

下面讨论被积函数中含有被开方因式为二次式的根式情况．

例 4.9 求下列不定积分：

（1）$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$（$a>0$）；　　（2）$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$（$a>0$）．

分析：如果作类似于例 4.9 的根式代换，则不能消去根号，为此，应使两个量的平方差表示成另一个量的平方，联想到三角函数的平方关系，可作如下的三角代换．

解：（1）
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x \overset{令x=a\sin t}{=\!=\!=\!=\!=} \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}(a\sin t)$$
$$=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(\int\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int\cos 2t\mathrm{d}2t\right)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$
$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C.$$

为将 t 回代为 x 的函数，由 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}$，
$$\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}，从而有$$
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

（2）
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x \overset{令x=a\tan t}{=\!=\!=\!=\!=} \int\frac{1}{\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}}\mathrm{d}(a\tan t)=\int\frac{1}{a\sec t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t$$
$$=\int\sec t\mathrm{d}t=\ln|\sec t+\tan t|+C_1.$$

由 $t=\arctan\frac{x}{a}$，$\tan\left(\arctan\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}$，$\sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$，从而有
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C\quad（C=C_1-\ln a）.$$

类似地，有：$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C$．

一般地说，当被积函数中含有：①$\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$（正弦代换）；②$\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$（正切代换）；③$\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$（正割代换）．

以上方法通常称为三角代换，当然也可作余弦（余切、余割）代换，有些甚至还可不必用三角代换，而用其他方法，应灵活掌握．其他类型在综合应用中再作介绍．

4.2.2 分部积分法

当被积函数是两种不同类型函数的乘积时，往往需要用下面所讲的分部积分法来解决．

分部积分法是利用乘积的求导法则而推得的一种基本积分方法．

定理 4.6　设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，则

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \quad \text{（分部积分公式）.}$$

证明：因为函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，所以可由乘积微分公式得：

$$\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u \text{，移项得：} u\mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v\mathrm{d}u \text{，}$$

两边积分得：$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$.

分部积分公式可以将求 $\int u\mathrm{d}v$ 的积分问题转化为求 $\int v\mathrm{d}u$ 的积分，当后者较容易时，分部积分公式就起到了化难为易的作用.

运用分部积分法的关键是恰当地选择好 u 和 $\mathrm{d}v$，一般要考虑如下两点：（1）v 要容易求出（通常用凑微分法求出）；（2）$\int v\mathrm{d}u$ 要比 $\int u\mathrm{d}v$ 容易积出.

分部积分法的计算步骤为：

$$\int uv'\mathrm{d}x \overset{v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}v}{\underset{\text{凑微分}}{=\!=\!=\!=}} \int u\mathrm{d}v \underset{\text{套公式}}{=\!=\!=\!=} uv - \int v\mathrm{d}u \overset{\mathrm{d}u=u'\mathrm{d}x}{\underset{\text{求微分}}{=\!=\!=\!=}} uv - \int vu'\mathrm{d}x .$$

例 4.10　求下列不定积分：

（1）$\int x\cos 2x\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

分析：若取 $u=\cos 2x$，$\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}x^2$，代入公式后，得：

$$\begin{aligned}\int x\cos 2x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos 2x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}(x^2\cos 2x - \int x^2\mathrm{d}\cos 2x)\\ &= \frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x^2\sin 2x\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

后者比原积分更难，说明这样的选取不合适.

因此，应取 $u=x$，$\mathrm{d}v=\cos 2x\mathrm{d}x$（熟悉以后，此步可不必写出）.

解：（1）$\int x\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}2x = \frac{1}{2}\int x\mathrm{d}\sin 2x$

$$= \frac{1}{2}(x\sin 2x - \int \sin 2x\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C .$$

同上分析应取 $u=x^2$，$\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$.

（2）$\int x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -(x^2\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^2) = -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}&= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2(x\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x)\\ &= -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + C = -(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x} + C.\end{aligned}$$

注意：（1）$\int P_n(x)\cos mx\mathrm{d}x$、$\int P_n(x)\sin mx\mathrm{d}x$ 和 $\int P_n(x)\mathrm{e}^{mx}\mathrm{d}x$，可设 $u=P_n(x)$，即选取三角函数或指数函数先凑微分.（$P_n(x)$ 为 n 次多项式）

（2）$\int P_n(x)\ln(x+1)\mathrm{d}x$ 和 $\int P_n(x)\arctan x\mathrm{d}x$，可设 $u=\ln(x+1)$ 或 $u=\arctan x$，即选取 $P_n(x)$ 先凑微分.

例 4.11　求下列不定积分：

（1）$\int \ln(x+1)\mathrm{d}x$；　　　　（2）$\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int \ln(x+1)\mathrm{d}x = [x\ln(x+1) - \int x\mathrm{d}\ln(x+1)] = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x$

$$= x\ln(x+1) - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + C.$$

（2）$\int x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan x\mathrm{d}x^2$

$$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - \int x^2\mathrm{d}\arctan x)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\arctan x - \int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left[x^2\arctan x - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{2}(x^2\arctan x - x + \arctan x) + C.$$

计算熟练后，可简化步骤为：

$$\int uv'\mathrm{d}x \xlongequal[\text{凑微分}]{v'\mathrm{d}x=\mathrm{d}v} \int u\mathrm{d}v \xlongequal[\text{套公式、求微分合二为一}]{} uv - \int vu'\mathrm{d}x.$$

例 4.12 求 $\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$.

解：$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \int \sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^x\sin x - \int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\sin x - \mathrm{e}^x\cos x - \int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x,$$

经两次分部积分后，回到原积分形成循环，移项后合并，再除以 2 得所求的积分：

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C.$$

注意：$\int \mathrm{e}^{mx}\sin nx\mathrm{d}x$，$\int \mathrm{e}^{mx}\cos nx\mathrm{d}x$，可任选其一先凑微分，两次分部积分后形成循环（注意两次的选取必须一致），通过解方程可得原积分.

此方法可推广：如果在分部积分后能形成“循环现象”，则可通过解方程来求得.

4.2.3 综合举例

在综合应用中，有时需要多种方法并用，才能求得其解；有时也可一题多解，学习时应注意在掌握了一般规律的条件下灵活应用.

例 4.13 求下列不定积分：

（1）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$；（2）$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\int x\mathrm{d}x + \int x\cos 2x\mathrm{d}x)$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\int x\mathrm{d}\sin 2x = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(x\sin 2x - \int\sin 2x\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C.$$

（2）$\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal[x=t^2]{\text{令}t=\sqrt{x}} \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t^2 = 2\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = 2\int t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = 2(t\mathrm{e}^t - \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t)$

$$=2(te^t-e^t)+C\overset{\text{回代}}{=\!=\!=}2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C.$$

例 4.14　求下列不定积分：

（1）$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$；　（2）$\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx$；　（3）$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

解：（1）解法 1（分项，凑微分）：

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}d(x^2+1)$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C=\ln|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}|+C.$$

解法 2（换元法）：

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}\overset{\text{令}x=\tan t}{=\!=\!=\!=\!=}\int\frac{d\tan t}{\tan t(\tan^2 t+1)}=\int\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec^2 t}dt$$

$$=\int\cot t dt=\ln|\sin t|+C\overset{\text{回代}}{=\!=\!=}\ln|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}|+C.$$

（2）解法 1（分项，凑微分）：

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=\int\frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}dx=\int\sqrt{1+x}d(1+x)-\int\frac{1}{\sqrt{1+x}}d(1+x)$$

$$=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+C.$$

解法 2（换元法）：

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx\underset{x=t^2-1}{\overset{\text{令}t=\sqrt{1+x}}{=\!=\!=\!=}}\int\frac{t^2-1}{t}2tdt=2\int(t^2-1)dt=2\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)+C$$

$$\overset{\text{回代}}{=\!=\!=}\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}-2(1+x)^{\frac{1}{2}}+C.$$

解法 3（分部积分）：

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx=2\int xd\sqrt{1+x}=2x\sqrt{1+x}-2\int\sqrt{1+x}dx$$

$$=2x\sqrt{1+x}-\frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

（3）解法 1（配方后套公式）：

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C=\arcsin(2x-1)+C.$$

解法 2（凑微分）：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

说明：选用不同的积分方法，可能得出不同形式的结果，即不定积分答案不唯一，这是因为原函数不唯一，所以原函数族即不定积分的表达式也不唯一.

习题 4.2

1．填空题

（1）$\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}(1-2x)$；（2）$x\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}(3x^2+1)$；

（3）$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$________；（4）$\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$________；

（5）$\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}\cos\frac{x}{2}$；（6）$x\mathrm{e}^{-2x^2}\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}\mathrm{e}^{-2x^2}$；

（7）$\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}$________；（8）$\sec 3x\tan 3x\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}\sec 3x$；

（9）$\frac{1}{1+4x^2}\mathrm{d}x=$________$\mathrm{d}\arctan 2x$；（10）$\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=$________$\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$.

2．利用换元法求下列不定积分：

（1）$\int\cos 2x\mathrm{d}x$；（2）$\int 2^{3x+1}\mathrm{d}x$；（3）$\int\sqrt{1-2x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int\frac{2}{1+5x}\mathrm{d}x$；（5）$\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；（6）$\int\mathrm{e}^x\cos\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；

（7）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$；（8）$\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$；（9）$\int\sin^3 x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

（10）$\int\sin 3x\cos 2x\mathrm{d}x$；（11）$\int\frac{x\tan\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；（12）$\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x-3}$；

（13）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$；（14）$\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{2x+1}}$；（15）$\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\mathrm{d}x$；

（16）$\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；（17）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}}$；（18）$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

3．利用分部积分法求下列不定积分：

（1）$\int x\sin 3x\mathrm{d}x$；（2）$\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$；（3）$\int\arcsin x\mathrm{d}x$；

（4）$\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$；（5）$\int\frac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；（6）$\int\cos\sqrt{x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int\mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x$；（8）$\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$.

4.3　定积分的概念

定积分是积分学中的第二个基本问题．下面首先利用定积分的几何背景引出定积分的概念，然后重点研究微积分基本定理，建立关于定积分的换元法与分部积分法．

4.3.1　曲边梯形的面积与定积分

所谓曲边梯形是指如图 4-3 所示的图形，如果我们会计算这样的曲边梯形面积，也就会计算任意曲线所围成的图形面积了（如图 4-4 所示）．在图 4-5 中，我们可以设想沿 y 轴方向纵向切割成无数个细直窄条，把每个窄条近似地看成一个矩形，这些矩形的面积加起来就是曲边梯形面积的近似值，易见，分割越细，误差越小，于是当所有窄条宽度趋于零时，其近似值的极限就成为曲边梯形面积的精确值了．具体计算过程简述如下：

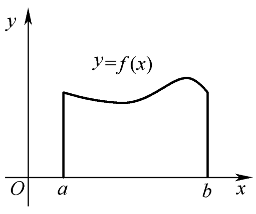

图 4-3

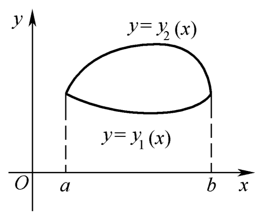

图 4-4

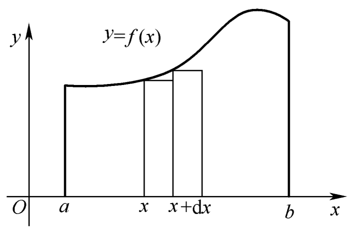

图 4-5

（1）无限细分：在闭区间$[a,b]$上任取子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$，以该子区间上对应的细直窄条代表任意分割后的每个窄条（如图 4-5 所示），取每个窄条面积的近似值为：$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$.

（2）无限求和：将上述每个细直窄条面积的近似值相加，得到所求曲边梯形面积的近似值并让每个窄条的宽度趋于零取极限，得到曲边梯形面积的精确值，该过程可简化为如下形式：$A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（符号“$\int_a^b$ ”代表将 $\mathrm{d}A$ 在区间$[a,b]$上无限累加（积分），即将闭区间$[a,b]$上的所有窄条面积的近似值相加后取极限．

在许多实际问题中，如路程、压力等物理量；面积、体积、弧长等几何量；产量、收益、成本等经济量，都可以归结为这样的数学模型，因此有必要将这种方法抽象出来，形成一个数学概念，称之为定积分，这种思想方法称之为微元法．

定义 4.3（定积分）设函数在$[a,b]$上有定义，在该区间上任取分点构成无数个小区间，并将这些小区间统记为$[x,x+\mathrm{d}x]$，在每个小区间上作乘积 $f(x)\mathrm{d}x$ ，并将这些乘积相加求和，如

果当每个小区间的宽度都趋于零时，上述和式的极限存在，则称该极限值为函数在区间$[a,b]$上的定积分，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，其中称x为积分变量，$f(x)$为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$为被积表达式，$[a,b]$为积分区间，a和b分别称为积分下限和上限，“$\int_a^b$ ”为定积分号.

关于定积分的几点说明：

（1）定积分是一个数，这个数只取决于被积函数和积分区间，而与积分变量采用什么字母表示无关，即有：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

（2）定义中要求$a<b$，为使积分限的大小没有限制，现作如下补充规定：

当$a=b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$；当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

（3）定积分的存在性：当$f(x)$在$[a,b]$上连续或只有有限个第一类间断点时，$f(x)$在$[a,b]$上的定积分存在（也称可积）.

因为初等函数在定义区间内都连续，所以有重要结论：初等函数在定义区间内部都是可积的.

定积分的几何意义：

（1）当$f(x)>0$时，图形在x轴之上，积分值为正，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$（如图 4-6 所示）.

（2）当$f(x)\leqslant 0$时，图形在x轴下方，积分值为负，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-A$（如图 4-7 所示）.

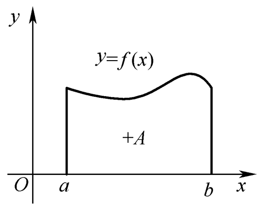

图 4-6

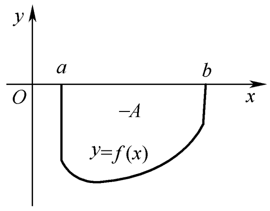

图 4-7

（3）当$f(x)$在$[a,b]$上有正有负时，则积分值等于曲线在x轴上方部分与下方部分面积的代数和，如图 4-8 所示，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A_1-A_2$.

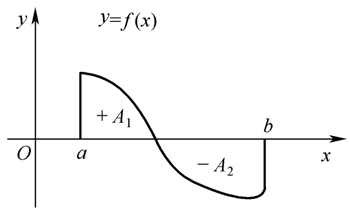

图 4-8

定理 4.7（线性性）函数和与差的定积分等于定积分的和与差，即

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

定理 4.8（线性性）被积函数的常数因子可提到积分号外面来，即

$$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

定理 4.9（可加性）若 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

定理 4.10（积分中值定理）若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$ 使得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$ 成立.

中值定理的几何意义：

曲边 $y=f(x)$ 在底 $[a,b]$ 上所围成的曲边梯形面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积（如图 4-9 所示）. 并且把这个矩形的高 $f(\xi)$ 称为曲边梯形的平均高度，由此给出函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值定义：

$$\overline{y} = f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x .$$

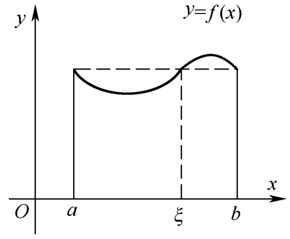

图 4-9

注意：（1）上述定理均可由定积分的精确定义证得，这里证明从略.（2）定理 4.7 与定理 4.8 可推广为函数代数和可逐项积分，即 $\int_a^b [mf(x)+ng(x)]\mathrm{d}x = m\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + n\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，并且此性质还可推广到有限多个函数的代数和情形.（3）在定理 4.9 中对于 a、b、c 三点的任何其他相对位置，上述性质仍成立，即 c 既可以是 $[a,b]$ 的内分点也可以是外分点. 例如：$a<b<c$，则

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_c^b f(x)\mathrm{d}x ,$$

所以仍有：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

4.3.2　微积分基本定理

定积分作为一种特定结构和式的极限，直接按定义计算是很繁杂的，我们通过一个中间概念——变上限定积分，将定积分与原函数联系起来，从而与不定积分联系起来，使定积分的计算得到简化.

定义 4.4（变上限定积分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，任取 $x \in [a,b]$，于是积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 是

一个定数，显然，当 x 在 $[a,b]$ 上变动时，对应于 x 的每一个值，积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 都有一个确定的值与之对应，因而积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 形成一个关于上限 x 的函数，记为 $\Phi(x)$，通常称函数 $\Phi(x)$ 为变上限积分函数或变上限定积分，即 $\Phi(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\quad} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$（$a\leqslant x\leqslant b$），几何意义如图 4-10 所示.

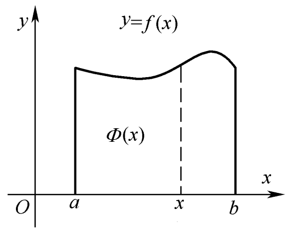

图 4-10

注意：在积分 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$ 中，x 既表示积分上限又表示积分变量，很不方便，因此有必要将该积分改写为 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

关于变上限定积分有如下定理：

定理 4.11（变上限定积分的求导定理）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有 $\Phi'(x)=f(x)$，即 $(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t)'=f(x)$.

注意：定理证明从略. 该定理表明了 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，因此该定理也称为连续函数原函数存在定理，这就解决了前面提出的有关原函数的存在性问题.

例 4.15 计算 $\Phi(x)=\int_a^x \sin t^2\mathrm{d}t$ 在 $x=0$，$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 处的导数.

解：由定理 4.11 得 $\Phi'(x)=\sin x^2$，

$$\therefore \Phi'(0)=\sin 0=0，\ \Phi'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 4.16 求下列函数的导数：

（1）$\Phi(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$；　　（2）$\Phi(x)=\int_x^{\mathrm{e}^x}\dfrac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$.

解：（1）$\Phi'(x)\xlongequal{令u=x^2}\left(\int_1^u \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)'_u\cdot u'_x=\mathrm{e}^{u^2}(x^2)'=2x\mathrm{e}^{x^4}$.

（2）$\Phi'(x)=\left(\int_x^a\dfrac{\ln t}{t}\mathrm{d}t+\int_a^{\mathrm{e}^x}\dfrac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\right)'$

$$=\left(-\int_a^x \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t+\int_a^{\mathrm{e}^x}\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t\right)'=-\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}(\mathrm{e}^x)'=x-\frac{\ln x}{x}.$$

公式推广：（1）$(\int_a^{u(x)} f(t)\mathrm{d}t)'=f[u(x)]u'(x)$；

（2）$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t=f[v(x)]v'(x)-f[u(x)]u'(x)$.

例 4.17　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\mathrm{d}t}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x \sin t\mathrm{d}t)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

利用求导定理可以得到关于定积分计算的重要公式.

定理 4.12（微积分基本定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$．该公式称为牛顿—莱布尼茨（Newton-Leibniz）公式，也叫微积分基本公式.

证明： 由定理 4.12 知 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是 $f(x)$ 的一个原函数，

$\therefore \Phi(x)-F(x)=C_0$，$C_0$ 为一常数，即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)+C_0$，

令 $x=a$，有 $\int_a^a f(t)\mathrm{d}t=F(a)+C_0=0$，$\therefore C_0=-F(a)$，

又令 $x=b$，得 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$.

在计算中上述公式常采用下面的格式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b \text{ 或 } \big[F(x)\big]_a^b.$$

4.3.3　公式应用举例

牛顿—莱布尼茨公式是计算定积分的基本公式，应用的关键是找到一个原函数 $F(x)$，一般可以用不定积分的方法寻求 $F(x)$.

例 4.18　计算下列定积分：

（1）$\int_0^1 \dfrac{2+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{1+\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　（3）$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$；

（4）$\int_1^2 \dfrac{\mathrm{d}x}{x+x^2}$；　（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x$；　（6）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \dfrac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}\mathrm{d}y$；

（7）$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^x)^2\mathrm{d}x$；　（8）$\int_0^3 |2-x|\mathrm{d}x$；

（9）$\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ 2x+1, & x>0.\end{cases}$

解：（1）$\int_0^1 \frac{2+x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1+x^2+1}{1+x^2}dx = \int_0^1\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

$$=\left[x+\arctan x\right]_0^1 = 1+\frac{\pi}{4}.$$

（2）$\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx = \int_1^e (1+\ln x)d\ln x = \left[\ln x + \frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^e = \frac{3}{2}$.

（3）$\int_0^1 te^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}d\left(-\frac{t^2}{2}\right) = -e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^1 = 1-e^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

（4）$\int_1^2 \frac{dx}{x+x^2} = \int_1^2 \frac{1+x-x}{x(1+x)}dx = \int_1^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx$

$$=\left[\ln|x|-\ln|1+x|\right]_1^2 = \ln\frac{4}{3}.$$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x d2x)$

$$=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

（6）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{y}}{y^2}dy = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y^2}dy = -\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \sin\frac{1}{y}d\frac{1}{y} = \cos\frac{1}{y}\Big|_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} = 0-(-1) = 1$.

（7）$\int_0^{\ln 2} e^x(1+e^x)^2 dx = \int_0^{\ln 2}(1+e^x)^2 d(1+e^x) = \frac{1}{3}(1+e^x)^3\Big|_0^{\ln 2} = 6\frac{1}{3}$.

（8）$\because$ 当 $x<2$ 时，有 $|2-x| = 2-x$；当 $x \geqslant 2$ 时，有 $|2-x| = x-2$.

$\therefore \int_0^3 |2-x|dx = \int_0^2 (2-x)dx + \int_2^3 (x-2)dx$

$$=\left[2x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_2^3 = 2\frac{1}{2}.$$

（9）$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 x^2 dx + \int_0^2 (2x+1)dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^0 + (x^2+x)\Big|_0^2 = 6\frac{1}{3}.$$

注意：（1）计算定积分的基本步骤是先用不定积分的方法求出 $F(x)$，再代入牛顿—莱布尼茨公式求增量.（2）含绝对值的定积分和分段函数的定积分可利用定积分的可加性分区间分段积分.

习题 4.3

1．利用定积分的几何意义填写下列定积分的值.

（1）$\int_a^b x\mathrm{d}x=$________；（2）$\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=$________；（3）$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=$________.

2．填空题

（1）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t=$________；（2）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t=$________；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t=$________；（4）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=$________.

3．选择题

（1）定积分是（　　）.

A．一个常数　　B．$f(x)$ 的一个原函数

C．一个函数族　　D．一个非负常数

（2）若 $f(x)\neq g(x)$，则（　　）（其中 $f(x)$、$g(x)$ 均为连续函数）.

A．$f'(x)\neq g'(x)$　　B．$\int f(x)\mathrm{d}x\neq\int g(x)\mathrm{d}x$

C．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$　　D．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\neq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

（3）若 $f'(x)=g'(x)$，则（　　）（其中 $f(x)$、$g(x)$ 均为连续函数）.

A．$f(x)=g(x)$　　B．$f(x)=g(x)+C$

C．$\int f(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}x$　　D．$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

4．求下列定积分：

（1）$\int_1^4\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$；

（3）$\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$；（4）$\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$；

（5）$\int_{-1}^2|x^2-1|\mathrm{d}x$；（6）$\int_0^{\sqrt{\ln 2}}x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_e^{\mathrm{e}^2}\dfrac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$；（8）$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1.\end{cases}$

4.4　定积分的计算

与不定积分的基本积分方法相对应，定积分也有换元法和分部积分法，在不定积分中对积分法的全面训练为定积分的计算奠定了必要的基础，读者在学习中应注意两者的比较.

4.4.1　换元积分法

定理 4.13　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

（1）$x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数.

（2）$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变化时，$x=\varphi(t)$ 的值在 $[a,b]$ 上变化，则有换元公式：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

定积分换元法的计算步骤为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{x=\varphi(t),\ \mathrm{d}x=\varphi'(t)\mathrm{d}t}{\underset{a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(t)\big|_\alpha^\beta .$$

注意：定理证明方法与不定积分的相应公式相类似，这里从略.

定积分的换元法与不定积分相比较，不定积分换元后要回代，而定积分换元后不必回代，但必须换限，并且原上限对新上限，原下限对新下限.

例 4.19 计算下列定积分：

（1）$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$；（2）$\int_{-3}^0 \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}\mathrm{d}x$；（3）$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}} \overset{\sqrt{x}=t,\ x=t^2}{\underset{x=4,\ t=2;\ x=0,\ t=0}{=\!=\!=\!=\!=}} \int_0^2 \frac{\mathrm{d}t^2}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{1+t-1}{1+t}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$$= 2\left[t-\ln|1+t|\right]_0^2 = 2(2-\ln 3) .$$

（2）$\int_{-3}^0 \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}\mathrm{d}x \overset{\sqrt{x+4}=t,\ x=t^2-4}{\underset{x=0,\ t=2;\ x=-3,\ t=1}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}} \int_1^2 \frac{t^2-4+1}{t}\mathrm{d}(t^2-4) = \int_1^2 \frac{t^2-3}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t$

$$= 2\int_1^2 (t^2-3)\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3-3t\right]_1^2 = -\frac{4}{3} .$$

（3）$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=2\sin t}{\underset{x=2,\ t=\frac{\pi}{2};\ x=0,\ t=0}{=\!=\!=\!=}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\mathrm{d}(2\sin t) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\mathrm{d}t$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = 2\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi .$$

例 4.20 设 $f(x)$ 在对称区间 $[-a,a]$ 上连续，试证明：

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x, & \text{当}f(x)\text{为偶函数时}, \\ 0, & \text{当}f(x)\text{为奇函数时}. \end{cases}$$

证明：$\because \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$，

而 $\int_{-a}^0 f(x)\mathrm{d}x \overset{x=-t}{=\!=\!=} \int_a^0 f(-t)\mathrm{d}(-t) = \int_0^a f(-t)\mathrm{d}t = \int_0^a f(-x)\mathrm{d}x$.

$\therefore \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$.

当 $f(x)$ 为偶函数即 $f(-x)=f(x)$ 时，有：

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x .$$

当 $f(x)$ 为奇函数即 $f(-x)=-f(x)$ 时，有：

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [-f(x)+f(x)]\mathrm{d}x = 0 .$$

注意：本题的几何意义如图 4-11 和图 4-12 所示. 此例给出了具有奇偶性的函数在对称区间上积分的化简方法. 以后可作为公式引用.

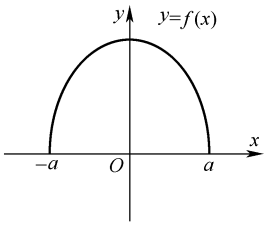

图 4-11

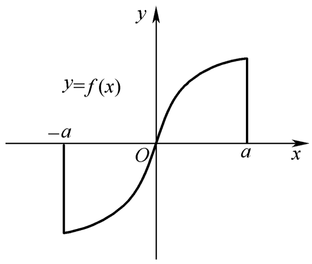

图 4-12

4.4.2　分部积分法

与不定积分的分部积分法相对应，定积分的分部积分法可叙述为：

定理 4.14　设 $u(x)$、$v(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，则有 $\int_a^b u\mathrm{d}v = uv\big|_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}u$．

注意：定理证明与不定积分的分部积分公式证明类似，这里从略.

其基本方法是运用分部积分公式把先积出来的那部分代限求值，余下的部分继续积分.

例 4.21　求下列定积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；

（3）$\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x$；　　（4）$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x$．

解：（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}\cos 2x = -\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\mathrm{d}x\right]$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{\pi}{4}.$$

（2）$\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\int_0^{\ln 2} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x} = -\left[x\mathrm{e}^{-x}\big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right]$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

（3）$\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\mathrm{d}\sin 2x\right)$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\left[x\sin 2x\big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin 2x\mathrm{d}x\right] = \pi^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{2\pi} = \pi^2.$$

（4）$\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\left[x^2\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x^2\mathrm{d}\arctan x\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}[x - \arctan x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4.4.3 综合举例

例 4.22 证明公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x$.

证明： $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x \overset{x=\frac{\pi}{2}-t}{\underset{\substack{x=0,\ t=\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2},\ t=0}}{=\!=\!=\!=}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right](-\mathrm{d}t)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x \text{ .}$$

例 4.23 计算定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

解法 1（换元法）：令 $t = \tan\frac{x}{2}$，$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$，$\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$ ，

且当 $x = 0$ 时，$t = 0$ ；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，$t = 1$ ，于是有，

$$I = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{1+2t+t^2} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{2}{1+t}\bigg|_0^1 = 1 \text{ .}$$

解法 2（凑微分法）：$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2 \cos^2\frac{x}{2}}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\mathrm{d}\tan\frac{x}{2}}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2} = -\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ .}$$

解法 3（利用例 4.22（1）中公式转换后再积分）：

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ .}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\cos x = -\frac{2}{3}\cos^{\frac{3}{2}} x\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 \text{ .}$$

习题 4.4

1．用换元法求下列定积分：

（1）$\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\mathrm{d}x$；　（3）$\int_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\mathrm{d}x$；　（5）$\int_{0}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x$；　（6）$\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$；

（7）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x+1}}$；　（8）$f(x)=\begin{cases}1+x, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x^2-1, & 2<x\leqslant 4;\end{cases}$ 求 $\int_{3}^{5}f(x-2)\mathrm{d}x$.

2．用分部积分法求下列定积分：

（1）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(x+x\sin x)\mathrm{d}x$；　（2）$\int_{0}^{2}t\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\mathrm{d}t$；　（3）$\int_{1}^{4}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（4）$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}|\arctan x|\,\mathrm{d}x$；　（5）$\int_{-\pi}^{\pi}x^3\sin^2 x\mathrm{d}x$；　（6）$\int_{1}^{\mathrm{e}}\cos\ln x\mathrm{d}x$；

（7）$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{x}\cos x\mathrm{d}x$.

4.5　广义积分

定积分是以有限区间与有界函数（特别是连续函数）为前提的，但在实际问题中，往往需要突破这两个限制，这就是要我们把定积分概念从这两方面加以推广，从而形成广义积分（或称反常积分），相对于反常积分，定积分也叫常义积分.

4.5.1　无穷区间上的广义积分

定义 4.5（无穷区间上的广义积分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，取 $b>a$，称极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分，记为

$$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x .$$

若上述极限存在，则称广义积分 $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若极限不存在，则称其是发散的.

类似地，可定义 $f(x)$ 在 $(-\infty,b]$ 上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x .$$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分定义为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x .$$

其中 c 为任意实数，当右端两个广义积分都收敛时，广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，否则是发散的.

上述积分统称为无穷区间上的广义积分或无穷限的广义积分，简称为无穷积分.

例 4.24　计算 $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}[-\mathrm{e}^{-x}]_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-b}+1)=1$.

注意：此时可称无穷积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛于 1.

为了书写简便，实际计算中常常省去极限记号，而形式地把“∞”当成一个“数”，直接利用牛顿—莱布尼茨公式进行计算，即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty).$$

其中$F(x)$为$f(x)$的原函数，记号$F(\pm\infty)$应理解为极限运算，即：$F(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}F(x)$.

例 4.25 计算下列无穷积分：

（1）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x$；　　（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解：（1）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^2x}\mathrm{d}\ln x=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=0-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$.

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

例 4.26 讨论$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$的敛散性.

解：当$p>1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_a^{+\infty}=\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}$（收敛）；

当$p=1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=[\ln|x|]_a^{+\infty}=+\infty$（发散）；

当$p<1$时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_a^{+\infty}=+\infty$（发散）；

综上，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{1}{(p-1)a^{p-1}}, & p>1 \text{（收敛）},\\ +\infty, & p\leqslant 1 \text{（发散）}.\end{cases}$

注意：此题结论可作为公式引用.

4.5.2 无界函数的广义积分

如果$f(x)$在区间$[a,b]$上有无穷间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上无界，此时的积分称为无界函数的广义积分.

定义 4.5（无界函数的广义积分）设$f(x)$在$(a,b]$上连续，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$（即$x=a$为$f(x)$的无穷间断点），取$\varepsilon>0$，称极限$\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x$为$f(x)$在$[a,b]$上的广义积分，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\mathrm{d}x .$$

若该极限存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；若极限不存在，则称其是发散的.

类似地，当 $x=b$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ 时， $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上的广义积分定义为：取 $\varepsilon>0$， $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$.

当无穷间断点 $x=c$ 位于区间 $[a,b]$ 内部时，则定义广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x .$$

此时，当右端两个广义积分都收敛时，广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 才收敛，否则是发散的.

上述广义积分统称为无界函数的广义积分.

在上述无界函数的广义积分中无穷间断点也称为瑕点，因此无界函数的广义积分也可简称为瑕积分，即此类广义积分是有瑕点的积分.

类似于无穷区间上的广义积分，实际计算中也可以省去极限符号，即

当下限 $x=a$ 是瑕点时： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_{a^+}^b = F(a^+)-F(b)$，

当上限 $x=b$ 是瑕点时： $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^{b^-} = F(a)-F(b^-)$.

其中 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，记号 $F(a^+)$ 与 $F(b^-)$ 应理解为极限运算，即

$$F(a^+)=\lim_{x\to a^+}F(x),\quad F(b^-)=\lim_{x\to b^-}F(x) .$$

例 4.27　计算 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ （$a>0$）.

解：瑕点 $x=a$ 为上限，于是 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a^-} = \frac{\pi}{2}$.

例 4.28　讨论 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ 的收敛性.

解：瑕点 $x=1$ 在 $[0,2]$ 的内部，于是

$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = \left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_0^{1^-} + \left(-\frac{1}{x-1}\right)\Big|_{1^+}^2$（不存在），即 $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$ 发散.

注意：瑕积分计算的关键在于识别瑕积分，即确定有无瑕点．此题若未注意到有瑕点，而按定积分计算，则会出现如下错误： $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^2 = -2$.

例 4.29　讨论 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 的敛散性.

解：瑕点 $x=0$ 为下限，于是当 $q<1$ 时， $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \frac{1}{1-q}\cdot x^{1-q}\Big|_{0^+}^1 = \frac{1}{1-q}$ （收敛），

当 $q=1$ 时，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}=[\ln|x|]_{0^+}^1=\infty$（发散）.

当 $q>1$ 时，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\frac{1}{1-q}\cdot x^{1-q}\Big|_{0^+}^1=\infty$（发散）.

故，当 $q<1$ 时，积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 收敛；当 $q\geqslant 1$ 时，积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 发散.

习题 4.5

1．计算下列积分：

（1）$\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$；（2）$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$；（3）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\mathrm{d}t$；

（4）$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；（5）$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$；（6）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

2．证明广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$，当 $k>1$ 时收敛；当 $k\leqslant 1$ 时发散.

4.6　积分的应用举例

定积分是一种实用性很强的数学方法，在科学技术问题中有着广泛的应用，本节重点介绍它在几何、物理、经济、电学方面的应用.

4.6.1　几何应用

利用微元法不难得到平面图形面积计算公式：

X–型区域（以 x 为积分变量，竖直矩形窄条的面积为微元，如图 4-13 和图 4-14 所示）：

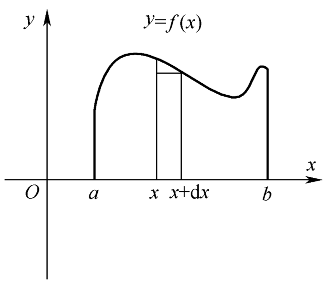

图 4-13

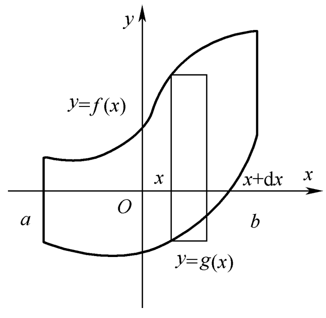

图 4-14

（1）$A=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（图 4-13）；（2）$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$（图 4-14）.

Y–型区域（以 y 为积分变量，水平矩形窄条的面积为微元，如图 4-15 和图 4-16 所示）：

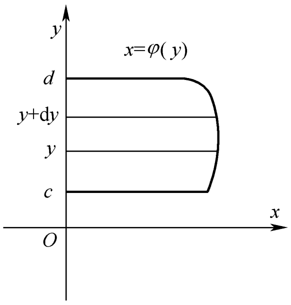

图 4-15

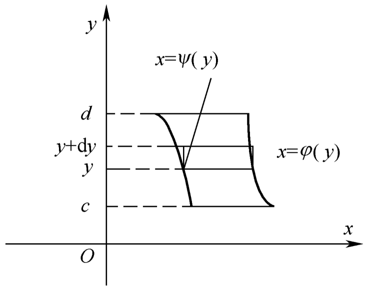

图 4-16

（1） $A=\int_c^d \varphi(y)\mathrm{d}y$ （图 4-15）；（2） $A=\int_c^d [\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y$ （图 4-16）.

下面举例说明公式的应用.

例 4.30　求由两曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的图形的面积.

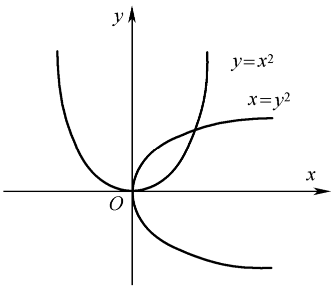

图 4-17

解法 1：画图形定交点（如图 4-17 所示），以 x 为积分变量， $x\in[0,1]$ ，于是所求面积为：

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

解法 2：此题也可以 y 为积分变量，仍有 $y\in[0,1]$， $A=\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$.

求平面图形面积的基本步骤如下：

（1）画图形，求交点.

（2）确定区域类型，从而确定积分变量、积分区间及被积函数.

（3）代入相应公式计算定积分.

例 4.31　求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成的图形的面积.

解：作图如图 4-18 所示，解方程组 $\begin{cases} y^2=2x \\ y=x-4 \end{cases}$ 得交点：$(2,-2)$ 和 $(8,4)$ ，取 y 为积分变量， $y\in[-2\,,4]$ ，于是所求图形面积为：

$$A=4\int_{-2}^4\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right]_{-2}^4=18.$$

注意：若以 x 为积分变量，则要分割成两个区域，计算较复杂.

例 4.32 求椭圆$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$（$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$）的面积，如图 4-19 所示.

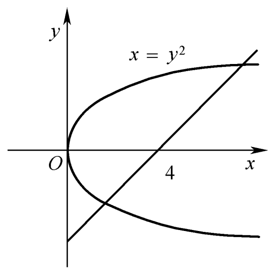

图 4-18

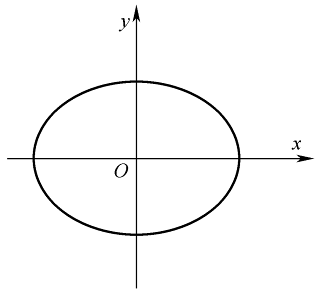

图 4-19

解：由对称性可得，$A = 4\int_0^a y\mathrm{d}x = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin\theta \mathrm{d}a\cos\theta = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta = 2ab\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab .$$

特别地，当$a = b = R$时，有圆的面积公式：$A = \pi R^2$.

曲边梯形的曲边为参数方程时，其面积计算法是：在上述面积公式的基础上采用定积分的换元法，特别要注意换元换限.

一般地，当曲边梯形的曲边由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$（$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$）给出时，则曲边梯形面积计算公式为：$A = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t$，其中$\alpha$与$\beta$分别是曲边的左、右端点所对应的参数值.

有些图形用极坐标计算面积比较方便. 下面用微元法推导在极坐标下“曲边扇形”的面积计算公式：$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

所谓“曲边扇形”是指由曲线$r = r^2(\theta)$及两条射线$\theta = \alpha$和$\theta = \beta$所围成的图形，如图 4-20 所示.

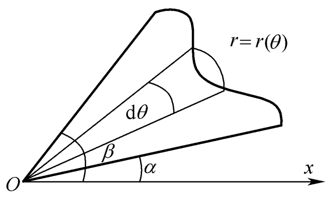

图 4-20

推导：取θ为积分变量，$\theta \in [\alpha, \beta]$，又在该区间上任取子区间$[\theta, \theta + \mathrm{d}\theta]$，则可取该子区间上对应的小曲边扇形面积的近似值为一个圆边扇形的面积，即$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$，将$\mathrm{d}A$在

$[\alpha,\beta]$上积分可得所求曲边扇形的面积为$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$．

例 4.33　计算双纽线$r^2=a^2\cos2\theta$（$a>0$）所围成的图形面积，如图 4-21 所示．

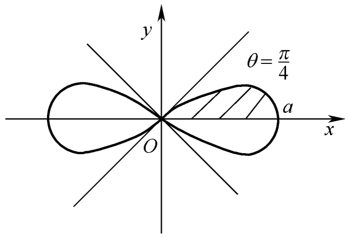

图 4-21

解：由对称性得：$A=4A_{阴}$且对应于阴影部分：$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，于是所求面积为：

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta\mathrm{d}\theta=a^2\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2 .$$

下面用微元法推导 x-型区域绕 x 轴旋转形成的旋转体（如图 4-22 所示）的体积公式：$V_x=\pi\int_b^a f^2(x)\mathrm{d}x$．

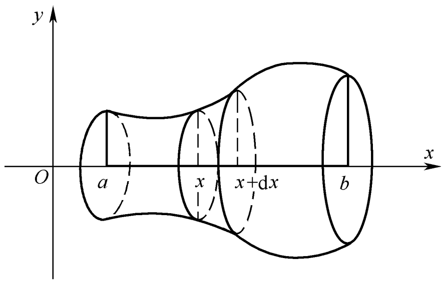

图 4-22

推导：以 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，任取子区间$[x,x+\mathrm{d}x]$得体积微元：

$$\mathrm{d}V=\pi y^2\mathrm{d}x=\pi f^2(x)\mathrm{d}x .$$

将$\mathrm{d}V$在$[a,b]$上积分得所求旋转体的体积：$V_x=\pi\int_b^a f^2(x)\mathrm{d}x$．

公式推广：$V_x=\pi\int_b^a[f^2(x)-g^2(x)]\mathrm{d}x$（如图 4-14 所示）

类似地，y–型区域绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积公式：$V_y=\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$（如图 4-15 所示）

公式推广：$V_y=\pi\int_c^d[\varphi^2(y)-\psi^2(y)]\mathrm{d}y$（如图 4-16 所示）.

例 4.34　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a$，$b>0$）绕 x 轴旋转形成的旋转椭球体的体积.

解：由 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 得：$y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$.

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

类似地，绕 y 轴旋转形成的立体（如图 4-23 所示）的体积：$V_y=\dfrac{4}{3}\pi a^2b$.

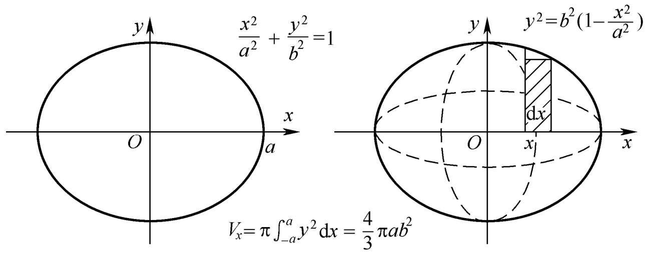

图 4-23

特别地，当 $a=b=R$ 时得球的体积：$V_{球}=\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

注意：在求旋转体的体积时，如果旋转过程中，有重合的部分不能重复计算. 如在上例中，上、下两半椭圆旋转时就是重合的，因此只能计算一半图形旋转时的体积.

例 4.35 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 围成的图形的面积及其分别绕两坐标轴旋转形成的立体的体积，如图 4-24 所示.

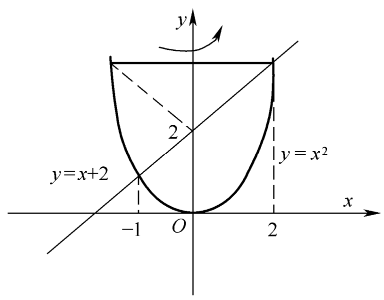

图 4-24

解：解方程组 $\begin{cases}y=x^2\\ y=x+2\end{cases}$ 得交点：$(-1,1)$ 和 $(2,4)$，以 x 为积分变量，$x\in[-1,2]$，于是所求面积为：

$$A=\int_{-1}^{2}[(x+2)-x^2]\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

当图形绕 x 轴旋转时，形成的立体的体积为：

$$V_x=\pi\int_{-1}^{2}[(x+2)^2-(x^2)^2]\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{3}(x+2)^3-\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{2}=\frac{72}{5}\pi .$$

当图形绕 y 轴旋转时形成的立体可以看成由抛物线旋转形成的立体体积与一个三角形旋转形成的圆锥的体积之差．于是该立体的体积为：

$$V_y=V_{抛}-V_{锥}=\pi\int_0^4 y\mathrm{d}y-\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 2^2\cdot(4-2)=\pi\cdot\frac{1}{2}y^2\Big|_0^4-\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi .$$

例 4.36　求由抛物线 $y=x^2+2$ 与直线 $x=0$、$x=1$、$y=0$ 所围成的平面图形（如图 4-25 所示）分别绕两坐标轴旋转而成的立体的体积．

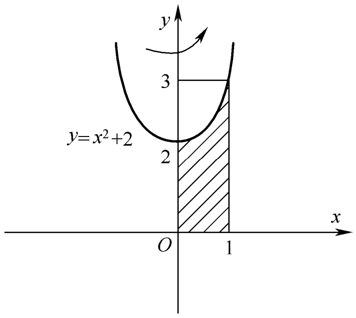

图 4-25

解：$V_x=\pi\int_b^a f^2(x)\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(x^2+2)^2\,\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_0^1(x^4+4x^2+4)\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1=\frac{83}{15}\pi .$$

$$V_y=V_{柱}-V_{抛}=\pi R^2h-\pi\int_c^d\varphi^2(y)\mathrm{d}y$$

$$=\pi\cdot 1^2\cdot 3-\pi\int_2^3(y-2)\mathrm{d}y=3\pi-\pi\left[\frac{1}{2}y^2-2y\right]_2^3$$

$$=3\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{5}{2}\pi .$$

下面利用微元法推导平面曲线 $y=f(x)$（假定其导数连续）从 $x=a$ 到 $x=b$ 的一段弧长 s（如图 4-26 所示）的计算公式：$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

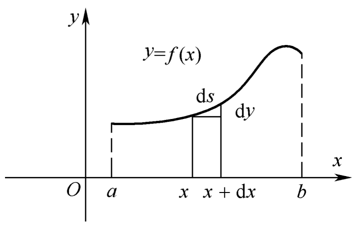

图 4-26

推导：以 x 为积分变量，$x\in[a,b]$，在 $[a,b]$ 内任取子区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 得弧长微元：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\ .$$

将 $\mathrm{d}s$ 在 $[a,b]$ 上积分得所求曲线的弧长：$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$.

注意：由于弧长公式中被积函数较复杂，所以代公式前，通常将 $\mathrm{d}s$ 部分充分化简后再积分.

例 4.37 两根电线杆之间的电线，由于自身重量而下垂成曲线，这一曲线称为悬链线，已知悬链线方程为 $y=\frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$（$a>0$），求从 $x=-a$ 到 $x=a$ 这一段的弧长（如图 4-27 所示）.

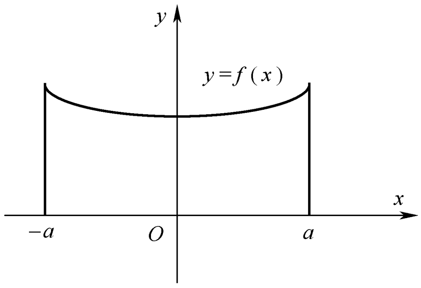

图 4-27

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}-\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})\mathrm{d}x$.

$$\therefore s=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})\mathrm{d}x$$

$$=a\int_0^a(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=a[\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}]_0^a=a(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})\ .$$

若曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$（$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$）给出，则弧长微元为：

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t\text{，于是所求弧长为：}s=\int_\alpha^\beta\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t\ .$$

例 4.38 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）一拱的弧长（$a>0$）.

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t=a\sqrt{2(1-\cos t)}\mathrm{d}t$

$$=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t\ .$$

$$\therefore s=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a\ .$$

4.6.2 物理应用

例 4.39 试在等温条件下，计算气体在容积由 V_1 膨胀至 V_2 时气体膨胀力所做的功（设气

体是符合玻－马定律的理想气体，气体容积为V_1时，汽缸内压强为p_1），如图 4-28 所示.

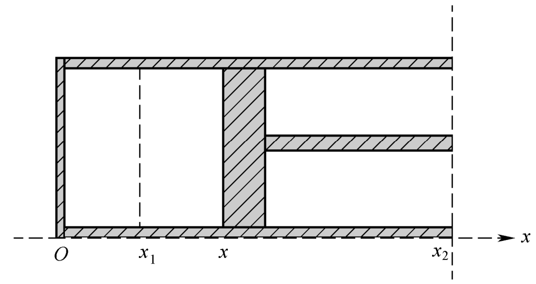

图 4-28

解：设汽缸的截面圆面积为 A，它就是活塞的面积.

在空气膨胀的过程中，活塞运动到x处，汽缸内气体压强为p，气体作用在活塞底面上的正压力即膨胀力为$F = pA$.

设此时空气体积为 V，则在等温条件下，理想气体的状态方程为$pV = C$，其中C是一个常数，注意到圆柱体的高为x，底面积为A，所以体积为$V = xA$.

综合这些关系式，有$F(x) = pA = p\dfrac{V}{x} = \dfrac{C}{x}$，这就是膨胀力，当活塞在膨胀力作用下由$x$运动到$x + \mathrm{d}x$时，微元功为$\mathrm{d}W = F(x)\mathrm{d}x = \dfrac{C}{x}\mathrm{d}x$，所以所求膨胀功为

$$W = \int_{x_1}^{x_2}\frac{C}{x}\mathrm{d}x = C\ln\frac{x_2}{x_1}，由于 C = p_1V_1 = p_2V_2 及 \frac{x_2}{x_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}，所以结果为$$

$$W = p_1V_1\ln\frac{V_2}{V_1} = p_1V_1\ln\frac{p_1}{p_2}.$$

例 4.40　一条长为$1.2\,\mathrm{m}$，质量为$2.4\mathrm{kg}$的匀质链条，其中有$0.4\mathrm{m}$在桌面上呈垂直于桌子边缘的直线状态，另有$0.8\mathrm{m}$垂于桌面下方，设桌面与链条之间的摩擦系数为$\mu = 0.4$，现在要将该链条沿桌面上原水平直线方向全部拉上桌面呈直线状，试问需要做多少功（如图 4-29 所示）？

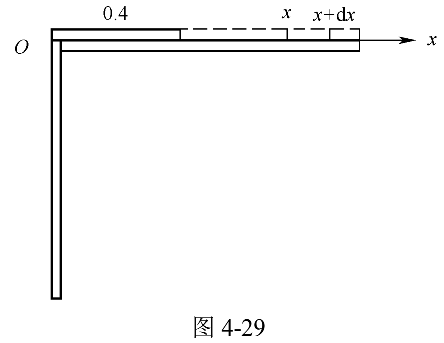

图 4-29

解：先求出链条的线密度

$$\rho = \frac{2.4}{1.2} = 2\ （\mathrm{kg/m}）$$

再以桌面边缘为坐标原点，拉动方向为 x 轴正向，建立坐标如图 4-29 所示.

据题意可知，只要拉动 0.8m，即把链条在桌面上的一个端点从 $x=0.4$ 拉到 $x=1.2$ 处，即可把全部链条呈水平直线状拉上桌面.

$\forall(x,x+\mathrm{d}x)\subset(0.4,1.2)$，当端点移动到 x 处时，需要施加的力 F 有两个部分：

（1）克服摩擦力部分 $F_1=\mu((x\rho)g)=7.848x$；

（2）克服重力部分 $F_2=(1.2-x)\rho g=23.544-19.62x$，

所以有 $F=F_1+F_2=23.544-11.772x$.

从而对应于位移区间 $(x,x+\mathrm{d}x)$ 上的微元功为 $\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=(23.544-11.772x)\mathrm{d}x$.

所以，要将链条全部拉上桌面需要做的功为

$$W=\int_{0.4}^{1.2}(23.544-11.772x)\mathrm{d}x\approx 11.3\ （\mathrm{J}）$$

例 4.41 有一个半径为 $R=2\mathrm{m}$ 的半球形水池，其中盛满了水，求：将水全部从上口抽尽，需要做的功（如图 4-30 所示）.

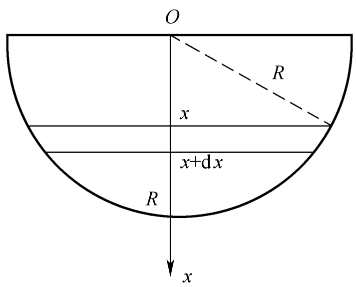

图 4-30

解：以球心为坐标原点，铅直向下为 x 轴正向，建立坐标轴如图 4-30 所示.

$\forall(x,x+\mathrm{d}x)\subset(0,2)$ 对应于该小区间的体积元素为

$\mathrm{d}V=\pi(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\pi(4-x^2)\mathrm{d}x$，质量元素和重力元素分别为

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho\pi(4-x^2)\mathrm{d}x，\ \mathrm{d}F=g\mathrm{d}m=\pi\rho g(4-x^2)\mathrm{d}x.$$

抽出这一层水所作的位移为 x，所以对应的微元功为 $\mathrm{d}W=x\mathrm{d}F=\pi\rho gx(4-x^2)\mathrm{d}x$.

要将池中的水全部抽尽，需要做的功为 $W=\pi\rho g\int_0^2 x(4-x^2)\mathrm{d}x=123.276$ （kJ）.

例 4.42 容器侧壁上有一个宽为 $5\mathrm{cm}$，高为 $2\mathrm{cm}$ 的矩形小孔，孔的上缘在水面下 $30\mathrm{cm}$，求此时从小孔中流出水的流量（单位时间内流出的水的体积）. 根据水力学定律可知，从水面下深为 $h\mathrm{cm}$ 处的小孔内流出的水的速度为 $v=\sqrt{2gh}$.

解：以小孔上缘某点为坐标原点 O，铅直向下为 x 轴，建立坐标轴如图 4-31 所示，在小孔上任取一水平窄缝，即 $\forall(x,x+\mathrm{d}x)\subset(0,2)$，由于该窄缝距水面深度为 $h=30+x$，所以水从窄缝中流出速度为 $v=\sqrt{2g(30+x)}$，而该窄缝的面积为 $\mathrm{d}A=5\mathrm{d}x$，于是得到流量微元为 $\mathrm{d}\Phi=v\mathrm{d}A=5\sqrt{2g(30+x)}\mathrm{d}x$，从而得到水从矩形小孔中流出的流量为

$$\Phi=\int_0^2 5\sqrt{2g(30+x)}\mathrm{d}x\approx 2466\ （\mathrm{cm^3/s}）$$

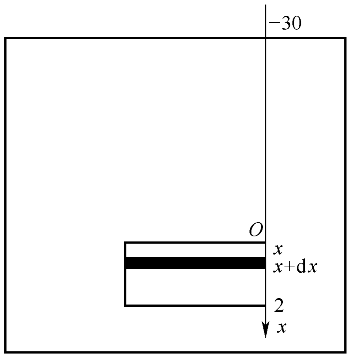

图 4-31

例 4.43　（击水泥桩入泥土中的做功问题）汽锤击圆柱形的水泥桩进入水中，设每次撞击汽锤所做的功相等，假定桩在泥土中前进时所受之阻力与水泥桩与泥土的接触面积成正比，即与水泥桩已经进入泥土中的深度成正比．已知汽锤第一次撞击，将水泥桩击入泥土中深度为 1m，问第二次又能将水泥桩再击入多深？

解：因为水泥桩进入到泥土中的深度为 x 时，所遇到的阻力为 $F(x)=\mu x$.

水泥桩在泥土中的深度由 x 变为 $x+\mathrm{d}x$ 时，进程中的微元功为

$$\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x=\mu x\mathrm{d}x，所以有 W_1=\int_0^1\mu x\mathrm{d}x，\ W_2=\int_1^{1+h}\mu x\mathrm{d}x .$$

由 $W_1=W_2$，即 $\frac{\mu}{2}=\frac{\mu}{2}\left[(1+h)^2-1\right]$，可解得 $\delta_2=h=\sqrt{2}-1$，即第二次撞击时又可将水泥桩再击入 $\delta_2=\sqrt{2}-1$（m）.

例 4.44　已知 1N 的力能使某弹簧拉长 1cm，求使弹簧拉长 5cm 拉力所做的功.

解：取弹簧的平衡点作为原点建立坐标系．由胡克定律知，在弹性限度内拉长弹簧所需的力 F 与拉长长度 x 成正比，即

$$F=kx .$$

其中 k 为劲度系数．已知拉长 $x=1\mathrm{cm}=0.01\mathrm{m}$ 需要力 $F=1\mathrm{N}$，于是 $k=100\mathrm{N/m}$，即 $F=100x$.

在区间 $[0,0.05]$ 中任一小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 上拉力所做的功即微元功为：

$$\mathrm{d}W=F\mathrm{d}x=100x\mathrm{d}x .$$

于是拉力使弹簧拉长 $5\mathrm{cm}=0.05\mathrm{m}$ 所做的功为：

$$W=\int_0^{0.05}100x\mathrm{d}x=\left[50x^2\right]_0^{0.05}=0.125\ （\mathrm{J}）$$

例 4.45　一质点做直线运动的方程为 $x=t^3$，其中 x 是位移，t 是时间，已知运动过程中介质的阻力与运动速度成正比，求质点从 $x=0$ 移动到 $x=8$ 时，外力克服阻力做的功.

解：质点的运动速度为 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3t^2$.

依题意，介质阻力 $F=3kt^2$，其中 k 为比例系数，取 x 为积分变量，它的变化区间为[0,8]，功的微元为 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x=3kt^2\mathrm{d}x=3kt^2\cdot 3t^2\mathrm{d}t=9kt^4\mathrm{d}t$，于是外力克服阻力做功为 $W=\int_0^2F(x)\mathrm{d}x=9k\int_0^2t^4\mathrm{d}t=\frac{9k}{5}t^5\Big|_0^2=\frac{288k}{5}$.

例 4.46　设有一形状为等腰梯形的闸门铅直竖立于水中，其上底为 8m，下底为 4m，高

为 6m，闸门顶齐水面，如图 4-32 所示．求水对闸门的压力．

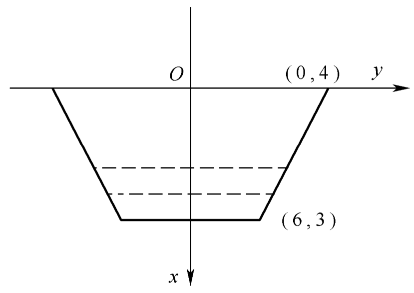

图 4-32

解：（1）选取积分变量为 x，确定积分区间为[0,6]．

（2）在区间[0,6]上，任取一个微小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$与它对应的小薄片面积近似等于长为 $2y=2\left(-\frac{1}{3}x+4\right)$、宽为 $\mathrm{d}x$ 的小矩形面积，这个小矩形一侧所受的压力微元为 $\mathrm{d}F=\rho gx2y\mathrm{d}x=2\times9.8\times10^3\left(4-\frac{x}{3}\right)x\mathrm{d}x$．

（3）取定积分可得闸门所受的压力为：

$$F=2\times9.8\times10^3\int_0^6\left(4x-\frac{x^2}{3}\right)\mathrm{d}x\approx9.02\times10^5\ \text{（N）}$$

例 4.47 匀质细杆，长为 L，质量为 m，求绕距其一端为 a，垂直于杆的轴的转动惯量，如图 4-33 所示．

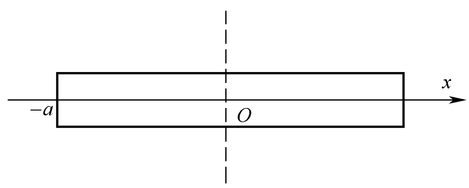

图 4-33

解：建立坐标系，在距离 O 为 x 处选一长度为 $\mathrm{d}x$ 的微元，其密度为 $\rho=m/L$，$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}x=m\mathrm{d}x/L$，此微元的转动惯量：$\mathrm{d}J=\frac{m}{L}x^2\mathrm{d}x$．

$$J=\frac{m}{L}\int_{-a}^{L-a}x^2\mathrm{d}x=\frac{m}{3L}x^3\Big|_{-a}^{L-a}=\frac{m}{3}(L^2-3La+3a^2)\text{．}$$

4.6.3 经济应用

1．由边际函数求原函数

（1）已知某产品总产量 Q 的变化率为 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=f(t)$，则该产品在时间 t 区间$[a,b]$内的总产量为 $Q=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$．

（2）已知某产品的总成本 $C_T(Q)$ 的边际成本为 $\dfrac{\mathrm{d}C_T(Q)}{\mathrm{d}Q}=C_M(Q)$，则该产品从产量 a 到产量 b 的总成本为 $C_T(Q)=\int_a^b C_M(Q)\mathrm{d}Q$.

（3）已知某产品的总收益 $R_T(Q)$ 的边际收益为 $\dfrac{\mathrm{d}R_T(Q)}{\mathrm{d}Q}=R_M(Q)$，则销售 N 个单位时的总收益为 $R_T(Q)=\int_0^N R_M(Q)\mathrm{d}Q$.

例 4.48　已知某商品边际收入为 $-0.08x+25$（万元/t），边际成本为 5（万元/t），求产量 x 从 250t 增加到 300t 时的销售收入 $R(x)$ 、总成本 $C(x)$ 、利润 $L(x)$ 的改变量（增量）.

解：首先求边际利润：

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)=-0.08x+25-5=-0.08x+20 .$$

所以根据式（1）、式（2）、式（3），依次求出：

$$R(300)-R(250)=\int_{250}^{300}R'(x)\mathrm{d}x=150 \text{（万元）；}$$

$$C(300)-C(250)=\int_{250}^{300}C'(x)\mathrm{d}x=250 \text{（万元）；}$$

$$L(300)-L(250)=\int_{250}^{300}L'(x)\mathrm{d}x=\int_{250}^{300}(-0.08x+20)\mathrm{d}x=-100 \text{（万元）.}$$

例 4.49　某银行的利息连续计算，利息率是时间 t（单位：年）的函数：

$$r(t)=0.08+0.015\sqrt{t} .$$

求它在开始 2 年，即时间间隔 $[0,2]$ 内的平均利息率.

解：由于

$$\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t=\int_0^2(0.08+0.015\sqrt{t})\mathrm{d}t=0.16+0.02\sqrt{2} .$$

所以开始 2 年的平均利息率为

$$r=\frac{\int_0^2 r(t)\mathrm{d}t}{2-0}=0.08+0.01\sqrt{2}\approx 0.094 .$$

例 4.50　某公司运行 t（年）所获利润为 $L(t)$（元），利润的年变化率为 $L'(t)=3\times10^5\sqrt{t+1}$（元/年），求利润从第 4 年初到第 8 年末，即时间间隔 $[3,8]$ 内的年平均变化率.

解：由于

$$\int_3^8 L'(t)\mathrm{d}t=\int_3^8 3\times10^5\sqrt{t+1}\mathrm{d}t=3.8\times10^6 .$$

所以从第 4 年初到第 8 年末，利润的年平均变化率为

$$\frac{\int_3^8 L'(t)\mathrm{d}t}{8-3}=7.6\times10^5 \text{（元/年）.}$$

即在这 5 年内公司平均每年获利 7.6×10^5 元.

例 4.51　已知某产品总产量的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=40+12t-\frac{3}{2}t^2 \text{（单位/天）.}$$

求从第 2 天到第 10 天产品的总产量.

解：所求的总产量为$Q=\int_2^{10}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}t=\int_2^{10}\left(40+12t-\frac{3}{2}t^2\right)\mathrm{d}t=400$（单位）.

2. 资本现值和投资问题

设在时间区间$[0,T]$内t时刻的单位时间收入为$f(t)$（收入率），若按年利率为r的连续复利计算，则在时间区间$[t,t+\mathrm{d}t]$内的收入现值为$f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t$，则总收入现值为

$$y=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t\ .$$

若收入率$f(t)=a$（常数），称为均匀收入率，若年利率r也为常数，则总收入现值为

$$y=\int_0^T f(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=a\cdot\frac{-1}{r}\mathrm{e}^{-rt}\Big|_0^T=\frac{a}{r}(1-\mathrm{e}^{-rT})\ .$$

例 4.52 某工程总投资在竣工时的贴现值为 1000 万元，竣工后的年收入预计为 200 万元，年利息率为 0.08，求该工程的投资回收期.

解：这里$A=1000$，$a=200$，$r=0.08$，则该工程竣工后T年内收入的总贴现值为

$$\int_0^T 200\mathrm{e}^{-0.08t}\mathrm{d}t=\frac{200}{-0.08}\mathrm{e}^{-0.08t}\Big|_0^T=2500(1-\mathrm{e}^{-0.08T})\ ,$$

令$2500(1-\mathrm{e}^{-0.08T})=1000$，即得该工程回收期为

$$T=-\frac{1}{0.08}\ln\left(1-\frac{1000}{2500}\right)=-\frac{1}{0.08}\ln 0.6=6.39\text{（年）}.$$

4.6.4 电学应用

1. 消耗在电阻R上的功

由电工学知道，经过时间t，直流电流I消耗在电阻R上的功为$W=I^2Rt$．对于交流电来说，电流强度$i=i(t)$是一个随时间变化的量，因此功的计算要用到定积分.

交流电的电流强度虽然是变化的，但在很短的时间间隔内，可以近似地看做是不变的（即把交流电近似看做直流电），因而就可以求得在$\mathrm{d}t$时间内功的微元$\mathrm{d}W=Ri^2(t)\mathrm{d}t$，于是在一个周期$[0,T]$内消耗在电阻$R$上的功$W$为

$$W=\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t\ .$$

2. 交流电的平均功率

在直流电路中，单位时间消耗在电阻R上的功叫做电功率，即$P=\frac{W}{t}=I^2R$.

由于交流电是变化的，故在实际应用中常采用平均功率的概念，即$\overline{P}=\frac{W}{T}$．其中W为一个周期内消耗在电阻R上的功，T为交流电变化一周所需的时间，即周期．由前面的讨论可知，$W=\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$．故平均功率为$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$.

例 4.52 设交流电$i(t)=I_m\sin\omega t$，其中I_m是最大电流强度，ω为角频率，而周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$，求交流电的平均功率.

解：$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} RI_m^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t=\frac{\omega R{I_m}^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\mathrm{d}t$

$$=\frac{\omega R{I_m}^2}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\omega RI_m^2}{4\pi}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\Bigg|_0^{\frac{\omega}{2\pi}}=\frac{RI_m^2}{2}.$$

3．交流电电流和电压的有效值

由于交流电是随时间变化的，在计算时颇多不便，因此在电工学中常常使用有效值这个概念．当交流电$i(t)$在一个周期内消耗在电阻R上的平均功率等于直流电流I消耗在电阻R上的功率时，这个直流电流的数值I就叫做交流电的有效值．

由于直流电流I消耗在R上的功率为I^2R，而交流电在一个周期内消耗在电阻R上的平均功率为$\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$．因此有$I^2R=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t$．从而有

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\mathrm{d}t}.$$

同样计算可得电压的有效值为

$$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}.$$

例 4.53　求交流电压$u(t)=U_m\sin\omega t$（其中I_m是最大电流强度，ω为角频率）经过半波整流后在一个周期内电压的平均值和有效值，如图 4-34 所示．

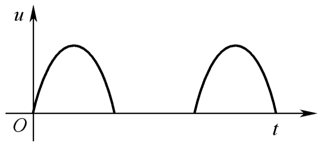

图 4-34

解：交流电压经过半波整流后，其表达式为$u(t)=\begin{cases}U_m\sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega},\\ 0, & \frac{\pi}{\omega}<t\leqslant\frac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$

由函数的平均值公式$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$得电压平均值：

$$\overline{U}=\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}-0}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}U_m\sin\omega t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}0\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{\omega U_m}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega t\mathrm{d}t=\frac{\omega U_m}{2\pi}\left(-\frac{1}{\omega}\cos\omega t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{U_m}{2\pi}(-1-1)=\frac{U_m}{\pi}\approx 0.318U_m.$$

电压有效值$U=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} U_m{}^2\sin^2\omega t\mathrm{d}t+\int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}}0\mathrm{d}t\right]}$

$$=\sqrt{\frac{\omega U_m{}^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin^2\omega t\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{\omega U_m^2}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{\frac{\omega U_m^2}{4\pi}\left(t-\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{\omega}}}=\sqrt{\frac{\omega U_m^2}{4\pi}\cdot\frac{\pi}{\omega}}=\frac{U_m}{2}.$$

习题 4.6

1．求下列曲线所围成的平面图形的面积：

（1）抛物线$x=y^2$与直线$y=x$；

（2）两抛物线$y=x^2$和$y=(x-2)^2$与x轴；

（3）三直线$y=x$ 、 $y=2x$及$y=2$；

（4）双曲线$xy=1$与直线$y=x$及$x=2$；

（5）心形线$r=a(1+\cos\theta)$；

（6）三叶玫瑰线$r=a\sin 3\theta$；

（7）摆线的一拱$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$（$0\leqslant t\leqslant 2\pi$）与$x$轴.

2．求下列曲线所围成的平面图形分别绕两坐标轴旋转而成的旋转体的体积：

（1） $y=x^2$与$y=1$； （2） $y=x^3$与$x=2$、 $y=0$.

3．计算曲线$y^2=x^3$上相应于$0\leqslant x\leqslant 1$的一段弧长.

4．求星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$的全长.

5．设生产某商品的固定成本是 20 元，边际成本函数$C'(q)=0.4q+2$（元/单位），求总成本函数$C(q)$. 如果该商品的销售单价为 22 元且产品可以全部卖出，问每天的产量为多少个单位时可使利润达到最大？最大利润是多少？

6．现对某企业给予一笔投资 A，经测算该企业在 T 年中可按每年 a 元的均匀收入率获得收入，如年利润为 r，试求：（1）该投资的纯收入贴现值；（2）收回该笔投资的时间为多少？

4.7 常微分方程初步

在许多实际问题中经常要研究变量之间的函数关系，但往往不能直接得到所需函数关系式，而只能得到含有未知函数的导数或微分的关系式，即微分方程. 因此需要从这样的方程中解出所需函数，即求解微分方程.

下面首先介绍微分方程的基本概念，然后重点讲解利用积分求解一些常见类型的微分方程.

4.7.1　常微分方程的基本概念

先看两个实例.

实例 1　求过点 $(3,1)$ 且在其上任意点 x 处斜率都为 x^2 的曲线方程.

解：由题给条件得 $\begin{cases} y' = x^2 & \cdots\cdots(1) \\ y|_{x=3} = 1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$，将（1）式两边积分：$y = \int x^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$.

又将（2）式代入得：$1 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 + C$，即 $C = -8$.

于是所求曲线方程为：$y = \frac{1}{3}x^3 - 8$.

实例 2　已知物体的初始速度为 v_0，加速度为 $a(t) = -g$，求物体的运动方程 $s = s(t)$.

解：由已知得 $\begin{cases} s'' = -g & \cdots\cdots(1) \\ s'|_{t=0} = v_0 & \cdots\cdots(2) \\ s|_{t=0} = 0 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$，将（1）式两边积分：$s' = -\int g\mathrm{d}t = -gt + C_1$.

上式两边再积分：$s = \int(-gt + C_1)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$.

将（2）、（3）两式代入得：$s'|_{t=0} = C_1 = v_0$，$s|_{t=0} = C_2 = 0$，故所求物体的运动方程为：$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$（此为上抛运动的方程）.

在上述两个实例中，我们建立的方程 $y' = x^2$ 与 $s'' = -g$ 都含有未知函数的导数，这样的方程称为微分方程.

一般地，含有未知函数的导数或微分的方程称为微分方程．如果未知函数是一元函数，则又称为常微分方程，微分方程中所含未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶．如 $y' = x^2$ 是一阶微分方程，$s'' = -g$ 是二阶微分方程.

一般地，n 阶微分方程可表示为：$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$.

实例 1 中 $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1$（含有一个任意常数）是微分方程 $y' = x^2$ 的通解，$y = \frac{1}{3}x^3 - 8$ 是方程的特解．用来确定通解中任意常数 C 的条件 $y|_{t=3} = 1$ 称为初始条件．该问题称为一阶微分方程的初值问题.

实例 2 中 $s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$（含有两个任意常数）是微分方程 $s'' = -g$ 的通解，$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ 是方程的特解．用来确定 C_1 和 C_2 的条件 $\begin{cases} s'|_{t=0} = v_0 \\ s|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 称为初始条件．该问题称为二阶微分方程的初值问题.

一般地，如果将函数代入微分方程后能使方程成为恒等式，这个函数称为微分方程的解.

微分方程的解有两种形式：一种含有任意常数，且独立的任意常数的个数与方程的阶数相同，称这样的解为微分方程的通解；另一种不含任意常数，称为微分方程的特解.

确定通解中任意常数的条件，称为初始条件.

对给定初始条件下的特解问题称为初值问题．在科学技术及生产实际中初值问题有着广

泛的应用.

通常，一阶微分方程的初值问题为：$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$

二阶微分方程的初值问题为：$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y'|_{x=x_0} = y'_0, y|_{x=x_0} = y_0. \end{cases}$

初值问题的解法：先求通解，再代入初始条件确定任意常数可得特解.

4.7.2 可分离变量的微分方程

定义 4.6 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ 的方程，称为可分离变量的微分方程.

如前面的两个实例就是这类方程，通常用两边积分的方法求解.

该方程的特点是：等式右边可以分解成两个函数的乘积，其中一个只是 x 的函数，另一个只是 y 的函数. 因此，可将该方程化为等式一边只含变量 x 而另一边只含变量 y 的形式，即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x$，其中 $g(y) \neq 0$，对于上式两边积分得 $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$，由于不定积分包含有一个任意常数 C，因此，这样求出的解就是方程的通解，这种解法称为分离变量法.

可分离变量微分方程的解法：（1）分离变量；（2）两边积分.

注意：有时可分离变量的微分方程也可以表述为如下形式：

$$P(x)Q(y)\mathrm{d}x + M(x)N(y)\mathrm{d}y = 0.$$

此时，分离变量：$\dfrac{N(y)}{Q(y)}\mathrm{d}y = -\dfrac{P(x)}{M(x)}\mathrm{d}x$，再两边积分：$\int \dfrac{N(y)}{Q(y)}\mathrm{d}y = -\int \dfrac{P(x)}{M(x)}\mathrm{d}x$ 可得通解.

例 4.39 求微分方程 $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}$ 的通解.

解：方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2xy}{1+x^2}$，分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

两边积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \int \dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)$.

所以 $\ln|y| = \ln|1+x^2| + \ln|C|$.

化简得通解 $y = C(1+x^2)$（C 为任意常数）.

注意：（1）用分离变量法求出的通常是隐式通解，一般能化简的就尽可能化简.

（2）在用对数函数表示通解时，任意常数往往也处理成对数形式，为简明起见通解通常不用绝对值形式表达，在本题中可表述为：$\ln y = \ln(1+x^2) + \ln C$，化简后，仍有 $y = C(1+x)^2$，其中 C 仍应理解为任意常数. 此种情形以后不再说明.

例 4.40 求初值问题 $\begin{cases} y'\cos y = \dfrac{\ln x}{x}, \\ y|_{x=\mathrm{e}} = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ 的特解.

解：方程变形为 $\cos y \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\ln x}{x}$，分离变量 $\cos y\mathrm{d}y = \dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

两边积分 $\int\cos y\mathrm{d}y=\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\ln x$，所以 $\sin y=\frac{1}{2}\ln^2 x+\frac{1}{2}C$.

化简得通解 $2\sin y=\ln^2 x+C$（C 为任意常数）.

又 $y|_{x=\mathrm{e}}=\frac{\pi}{2}$，所以 $C=1$，故所求特解为 $2\sin y=\ln^2 x+1$.

4.7.3　一阶线性微分方程

定义 4.7　形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ 的方程，称为一阶线性微分方程.

当 $Q(x)=0$ 时，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$，称为一阶齐次线性微分方程；当 $Q(x)\neq 0$ 时，称为一阶非齐次线性微分方程.

先利用分离变量法求一阶齐次线性微分方程的通解．即将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ 分离变量：$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$，再两边积分：$\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x$，化简得通解 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

再求一阶非齐次线性微分方程的通解.即显然当 C 为常数时 $y=C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 不是一阶非齐次线性微分方程的通解．令 $C=C(x)$，即设 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 是一阶非齐次线性微分方程的解，求导得：$y'=C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}+C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot[-P(x)]$，将上式代入非齐次方程中：$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=Q(x)$，即 $C'(x)=Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$，两边积分得通解 $y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$.

上述解法称为变易常数法.

例 4.41　求微分方程 $(x+1)y'-2y=(x+1)^5$ 的通解.

解：题给微分方程是一阶非齐次线性微分方程，对应齐次方程为：

$$(x+1)y'-2y=0\text{，即 }(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y\ .$$

分离变量：$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$，两边积分：$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x$.

得对应齐次方程的通解 $\ln y=2\ln(x+1)+\ln C$，即 $y=C(x+1)^2$.

令 $C=C(x)$，即设 $y=C(x)(x+1)^2$ 为原方程的解，将其导数 $y'=C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1)$ 代入原方程，得

$$C'(x)(x+1)^3+2C(x)(x+1)^2-2C(x)(x+1)^2=(x+1)^5\ .$$

整理化简得：$C'(x)=(x+1)^2$，

所以 $C(x)=\int(x+1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x+1)^3+C$.

故原方程的通解为：$y=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3+C\right](x+1)^2$.

即为：$y=\frac{1}{3}(x+1)^5+C(x+1)^2$（$C$ 为任意常数）.

例 4.42 求方程 $y'=\dfrac{y+x\ln x}{x}$ 的通解.

解：题给方程是一阶非齐次线性微分方程，其标准形式为：$y'-\dfrac{1}{x}y=\ln x$.

将 $P(x)=-\dfrac{1}{x}$、$Q(x)=\ln x$ 代入通解公式得：

$$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\left[\int \ln x\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}$$

$$=\left[\int \ln x\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{\ln x}=\left(\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x+C\right)x=\left(\int \ln x\mathrm{d}\ln x+C\right)x=\left(\frac{1}{2}\ln^2 x+C\right)x.$$

故所求微分方程的通解为：$y=\dfrac{1}{2}x\ln^2+Cx$（C 为任意常数）.

例 4.43 设一曲线通过原点，并且它在点 (x,y) 处的切线斜率等于 $2x+y$，求这条曲线方程.

解：由题设可得微分方程 $y'=2x+y$，这是一阶非齐次线性微分方程，其标准形式为：$y'-y=2x$，所以 $P(x)=-1$，$Q(x)=2x$.

故微分方程的通解为：

$$y=\left[\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}=\left[\int 2x\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}$$

$$=2\int 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\mathrm{e}^{x}=\left(-2\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}+C\right)\mathrm{e}^{x}=\left(-2x\mathrm{e}^{-x}+2\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{x}$$

$$=(-2x\mathrm{e}^{-x}-2\mathrm{e}^{-x}+C)\mathrm{e}^{x}=C\mathrm{e}^{x}-2(x+1).$$

又曲线通过原点，代入通解，得：$0=C\mathrm{e}^0-2(0+1)$，所以 $C=2$.

故所求曲线方程为：$y=2(\mathrm{e}^x-x-1)$.

4.7.4 二阶线性常系数微分方程

定义 4.8 形如 $y''+py'+qy=f(x)$（p、q 为常数）的方程，称为二阶常系数线性微分方程.

当 $f(x)=0$ 时，有 $y''+py'+qy=0$，称为二阶常系数齐次线性微分方程；当 $f(x)\neq 0$ 时，称为二阶常系数非齐次线性微分方程，且称 $f(x)$ 为非齐次项，也叫自由项.

定义 4.9（函数的线性相关性）设函数 $y_1(x)$、$y_2(x)$ 是定义在某区间上的函数，若存在两个不全为零的数 k_1、k_2 使得对于该区间内任一 x 恒有 $k_1y_1+k_2y_2=0$ 成立，则称函数 y_1、y_2 在该区间上线性无关，否则称为线性相关．易知，函数 y_1、y_2 线性相关的充要条件是 $\dfrac{y_1}{y_2}=$ 常数.

定理 4.15（齐次线性方程解的叠加原理）若 y_1、y_2 是齐次线性方程 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，则 $y=C_1y_1+C_2y_2$ 也是该方程的解，且当 y_1、y_2 线性无关时，$y=C_1y_1+C_2y_2$ 就是该方程的通解.

定理 4.16（非齐次线性方程解的结构）若 y^* 为非齐次线性方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 的某个特解，Y 为对应齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解，则 $y=Y+y^*$ 为非齐次方程

$y''+py'+qy=f(x)$ 的通解．

定理 4.17　若 y_1、y_2 分别是方程 $y''+py'+qy=f_1(x)$ 与 $y''+py'+qy=f_2(x)$ 的解，则 $y=y_1+y_2$ 是方程 $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ 的解．

注意：上述三个定理用代入验证的方法很容易证明．这里证明从略．

二阶常系数齐次线性微分方程的求解方法：

（1）写出微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$，并求出特征根：$r_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$．

（2）按下表写出所求微分方程的通解．

特征方程的特征根	通解形式
两个不等实根 r_1、r_2（特征单根）	$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$
两个相等实根 $r_1=r_2=r$（特征重根）	$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\mathrm{i}\beta$（特征复根）	$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例 4.44　求微分方程 $y''+y'-6y=0$ 的通解．

解：特征方程：$r^2+r-6=0$，特征根：$r_1=-3$，$r_2=2$．

故所求微分方程的通解为：$y=C_1\mathrm{e}^{-3x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$（$C_1$、$C_2$ 为任意常数）．

例 4.45　求微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解．

解：特征方程：$r^2+4r+4=0$，特征根：$r_1=r_2=-2$．

所以所求微分方程的通解为：$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$．

所以 $y'=C_2\mathrm{e}^{-2x}+(C_1+C_2x)\cdot(-2)\mathrm{e}^{-2x}=(C_2-2C_1-2C_2x)\mathrm{e}^{-2x}$．

又由初始条件得：$y|_{x=0}=1$，$y'|_{x=0}=0$ 得 $\begin{cases}C_1=1,\\C_2-2C_1=0.\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}C_1=1,\\C_2=2.\end{cases}$

故所求特解为：$y=(1+2x)\mathrm{e}^{-2x}$．

例 4.46　求微分方程 $y''-2y'+3y=0$ 的通解．

解：特征方程：$r^2-2r+3=0$，特征根：$r_{1,2}=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$，即 $\alpha=1$，$\beta=\sqrt{2}$．

故所求微分方程的通解为：$y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$（$C_1$、$C_2$ 为任意常数）．

二阶常系数非齐次线性微分方程的特解求法：

（1）$f(x)=P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$（其中 $P_m(x)$ 为 m 次多项式，λ 为常数）．

1）λ 不是特征根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq0$ 时，上式左端的次数与 $Q(x)$ 相同，右端次数为 m，所以可设：$y^*=Q(x)\mathrm{e}^{\lambda x}=Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$，其中 $Q_m(x)$ 也是 m 次多项式．

2）λ 是特征单根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，而 $2\lambda+p\neq0$ 时，同上分析可设：$y^*=xQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$．

3）λ 是特征重根，即 $\lambda^2+p\lambda+q=2\lambda+p=0$ 时，同上分析可设：$y^*=x^2Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$．

（2）$f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_h(x)\sin\beta x]$．

若 λ 不是特征根，则 $y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$；若 λ 是特征根，则 $y^*=x\mathrm{e}^{\alpha x}$

$[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$. $m=\max\{n,h\}$.

二阶常系数非齐次线性微分方程通解求法：

（1）求对应齐次方程的通解 Y;（2）利用二阶常系数非齐次线性方程的特解公式求它本身的一个特解 y^*，其中可用待定系数法求出多项式 $Q_m(x)$ 的各项系数 $b_1, b_2, \cdots, b_m$；（3）利用二阶常系数非齐次线性方程的结构定理写出其通解 $y = Y + y^*$.

例 4.47 求微分方程 $y'' - 6y' + 9y = \mathrm{e}^{3x}$ 的一个特解.

解：对应齐次线性微分方程的特征方程为：$r^2 - 6r + 9 = 0$，特征根：$r_{1,2} = 3$.

自由项 $f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{3x}$，$P_m(x) = 1$，$\lambda = 3$ 是特征重根，所以 $k = 2$，$Q_m(x) = A$，于是可设特解 $y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = Ax^2\mathrm{e}^{3x}$，将其一、二阶导数：

$$y^{*\prime} = 2Ax\mathrm{e}^{3x} + 3Ax^2\mathrm{e}^{3x} = A(2x + 3x^2)\mathrm{e}^{3x},$$

$$y^{*\prime\prime} = A(2+6x)\mathrm{e}^{3x} + 3A(2x+3x^2)\mathrm{e}^{3x} = A(2+12x+9x^2)\mathrm{e}^{3x}.$$

代入原方程并消去 e^{3x} 得：$A(2+12x+9x^2) - 6A(2x+3x^2) + 9Ax^2 = 1$，

化简：$2A = 1$，即 $A = \dfrac{1}{2}$，于是，$y^* = \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{3x}$ 是原方程的一个特解.

例 4.48 求微分方程 $y'' + y' = x$ 的通解.

解：特征方程：$r^2 + r = 0$，特征根：$r = 0$，$r = -1$，对应齐次方程的通解 $Y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

$f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = x$，$P_m(x) = x$，$\lambda = 0$ 是特征单根，所以 $k = 1$，$Q_m(x) = Ax + B$.

设 $y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx$，则 $y^{*\prime} = 2Ax + B$，$y^{*\prime\prime} = 2A$.

代入原微分方程得：$2A + (2Ax + B) = x$，比较系数得：$\begin{cases}2A+B=0,\\2A=1.\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}A=\dfrac{1}{2},\\B=-1.\end{cases}$

所以原方程的一个特解为：$y^* = \dfrac{1}{2}x^2 - x$.

故所求微分方程的通解为：$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2 - x$.

例 4.49 求微分方程 $y'' + y = 4x\mathrm{e}^x$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 0$，$y'|_{x=0} = 1$ 下的特解.

分析：由上述特解公式求出的特解不一定符合初始条件的要求，一般特解的计算仍然是先求通解再定特解.

解：特征方程：$r^2 + 1 = 0$，特征根：$r_{1,2} = \pm\mathrm{i}$，对应齐次方程的通解 $Y = C_1\cos x + C_2\sin x$.

又 $f(x) = P_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = 4x\mathrm{e}^x$，$P_m(x) = 4x$，$\lambda = 1$ 不是特征根，所以 $k = 0$，$Q_m(x) = Ax + B$，于是设原方程的一个特解为：$y^* = x^k Q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x} = (Ax+B)\mathrm{e}^x$，将 $y^{*\prime} = (A + Ax + B)\mathrm{e}^x$，$y^{*\prime\prime} = (2A + Ax + B)\mathrm{e}^x$ 代入原方程并消去 e^x 得：

$$(2A + Ax + B) + (Ax + B) = 4x，即 2Ax + 2(A+B) = 4x.$$

比较系数得：$\begin{cases}2A=4,\\A+B=0.\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}A=2,\\B=-2.\end{cases}$ 所以 $y^* = 2(x-1)\mathrm{e}^x$.

所以原方程的通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x + 2(x-1)\mathrm{e}^x$.

所以　$y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2x\mathrm{e}^x$.

由题给初始条件解得：$C_1 = 2$ ，$C_2 = 1$ ，

故所求特解为：$y = 2\cos x + \sin x + 2(x-1)\mathrm{e}^x$.

例 4.50　求微分方程 $y'' + y = \sin x$ 的通解.

解：对应齐次方程的特征方程为：$r^2 + 1 = 0$ ，特征根为：$r = \pm\mathrm{i}$ ，

齐次方程的通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x$ ，

自由项：$f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_h(x)\sin\beta x] = \sin x$ ，

所以 $\alpha = 0$ ，$\beta = 1$ ，$P_n(x) = Q_h(x) = 1$ ，$\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta = \mathrm{i}$ 是特征方程的复根，所以取 $k = 1$ ，$P_m(x) = A$ ，$Q_m(x) = B$.

于是设特解 $y^* = x^k\mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x] = x(A\cos x + B\sin x)$ ，

$$\begin{aligned} y^{*\prime} &= (A\cos x + B\sin x) + x(-A\sin x + B\cos x) \\ &= (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= B\cos x - (A + Bx)\sin x - A\sin x + (B - Ax)\cos x \\ &= (2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x. \end{aligned}$$

将上两式代入原方程得：

$$[(2B - Ax)\cos x - (2A + Bx)\sin x] + x(A\cos x + B\sin x) = \sin x ,$$

化简得：$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$ ，所以 $A = -\dfrac{1}{2}$，　$B = 0$ ，所以 $y^* = -\dfrac{1}{2}x\cos x$.

故所求通解为：$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{1}{2}x\cos x$.

4.7.5　常微分方程的应用

例 4.51　（降落伞着地时的速度问题）现在有一个质量为 $m = 80\mathrm{kg}$ 的（包括装备在内）运动员，从高空跳下，设下落时的总阻力与下落速度成正比，比例系数为 $k = 100\mathrm{kg/s}$. 设整个降落过程为 $90\,\mathrm{s}$ ，求运动员起跳的高度 h 和着地的速度.

解：取起跳点为原点，铅直向下为 x 轴，设在时刻 t 运动员的坐标为 $x(t)$ ，则有初始条件 $x(0) = 0$ ，$x'(0) = 0$. 根据牛顿第二运动规律可得 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mg - k\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ，这是一个二阶常系数线性非齐次微分方程，通解为 $x = C_1\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + C_2 + \dfrac{mg}{k}t$.

根据初始条件 $x(0) = 0$ ，$x'(0) = 0$ 可得 $C_1 = \dfrac{m^2g}{k^2}$ ，$C_2 = -\dfrac{m^2g}{k^2}$ ，即 $x = \dfrac{m^2g}{k^2}(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \dfrac{mg}{k}t$.

将题中数据代入可得 $h \approx 700.04$ （m），$v \approx 7.848$ （m/s）.

例 4.52　有一小船从岸边的 O 点出发驶向对岸，假定河流两岸是互相平行的直线，并设船速为 a ，方向始终垂直于对岸，又设河宽为 $2l$ ，河面上任一点处的水速与该点到两岸距离之积成正比，比例系数为 $\mathrm{k} = \dfrac{v_0}{l^2}$ ，求小船航行的轨迹方程.

解：以指向对岸方向为 x 轴方向，顺水方向为 y 轴方向，建立坐标系如图 4-35 所示，根

据题意条件可知，在时刻 t 有

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a\text{，}\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=kx(2l-x)=\frac{v_0}{l^2}x(2l-x)\text{，}\quad \text{即}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_0}{al^2}x(2l-x)\text{．}$$

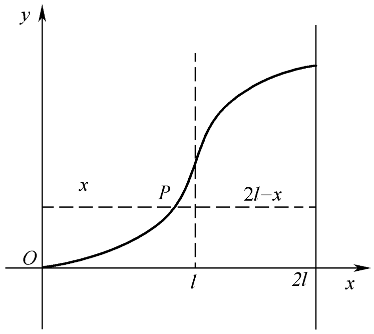

图 4-35

这是一个可分离变量方程，分离变量再积分，可得 $y=C+\frac{v_0}{3al^2}(3lx^2-x^3)$，

由初始条件 $(x_0,y_0)=(0,0)$，可得 $C=0$，即小船航行的轨迹方程为 $y=\frac{v_0}{3al^0}(3lx^2-x^3)$，$0\leqslant x\leqslant 2l$．

例 4.53 （电动机降温问题）一电动机启动后，其机身温度会不断升高，升高速度为每小时 20℃，为防止温度无限升高而烧坏机器或发生其他生产事故，在电动机启动后就要立即对它采取降温措施，最简单的降温措施就是用强力电扇将恒温空气对它猛吹，使它冷却降温，根据牛顿冷却定律可知冷却速度和机身与空气的温差成正比，设空气的温度一直保持 15℃不变．试求电动机温度的变化规律．

解：设在启动后经 t 小时后电动机的温度为 $T(t)$，在时间段（$t,t+\mathrm{d}t$）内电动机温度的变化情况，根据电动机温度的改变量 $\mathrm{d}T=$ 自身的升温作用 $20\mathrm{d}t-$空气的降温效果 $k(T-15)\mathrm{d}t$，即有 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=20-k(T-15)$，其中 k 是一个正的常数．

上述方程是一个可分离变量的方程，用分离变量法求解，可得通解为 $T=15+\frac{20}{k}+C\mathrm{e}^{-kt}$，由初始条件 $T(0)=15$ 可得 $C=-\frac{20}{k}$，从而可得特解

$$T=15+\frac{20}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})\text{．}$$

例 4.54 如图 4-36 所示，在离水面高度为 hm 的岸上，有人用绳子拉船靠岸，假定绳长为 1m，船位于离岸壁 s 处，试问：当收绳速度为 v_0 m/s 时，船的速度、加速度各是多少？

解：l、h、s 三者构成了直角三角形，由勾股定理得 $l^2=h^2+s^2$． （1）

两端同时对时间求导，得 $2l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=0+2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，即 $l\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$． （2）

l 为绳长，按速度定义，$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$ 即为收绳速度 v_0，船只能沿 s 线在水面上行驶逐渐靠近岸壁，

因而$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$应为船速 v，将它们代入（2）式得船速

$$v=\frac{l}{s}v_0\ .\qquad (3)$$

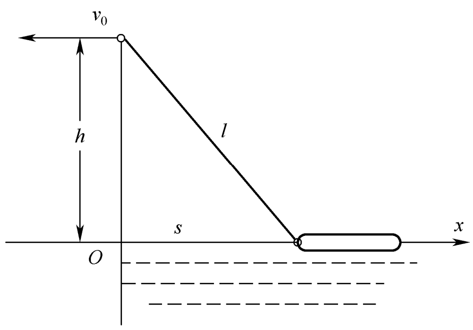

图 4-36

利用（1）式消去 l，得$v=\dfrac{\sqrt{h^2+s^2}}{s}v_0$ （m/s）.（4）

（4）式中 h、v_0 都是常数，只有 s 是变量．按加速度定义

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left(-\frac{h^2}{s^2\sqrt{h^2+s^2}}v_0\right)v\ .$$

将（4）式代入上式，得$a=-\dfrac{h^2{v_0}^2}{s^2}$ （$\mathrm{m/s^2}$）.（5）

这里的负号表明加速度的方向与 x 轴的正向相反．

习题 4.7

1．填空题

（1）微分方程$\sqrt[n]{y^{(n)}}-2y+\sin x=1$的阶数为________.

（2）设函数 $y=f(x,C_1,\cdots,C_n)$ 是微分方程 $y'''-xy+2y=1$ 的通解，则任意常数的个数 $n=$________.

（3）设曲线 $y=f(x)$ 上任一点 (x,y) 处的切线垂直于该点与原点的连线，则曲线所满足的微分方程为________.

2．选择题

（1）下列判断正确的是（　　）;

A．$(y')^2+xy=\mathrm{e}^x$ 是二阶微分方程

B．$y''+\sin y+x=0$ 是一阶微分方程

C．$\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+xy^2+x=2$ 是一阶微分方程

D．$y\mathrm{d}x+(2-x)\mathrm{d}y+1=0$ 不是微分方程

（2）函数 $y=C_1\mathrm{e}^{C_2-3x}-1$（其中 C_1、C_2 是任意常数）是微分方程 $y''-9y=9$ 的（　　）；

A．通解　　B．特解

C．解　　D．不是解

（3）微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+1$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解是（　　）．

A．$y=C\mathrm{e}^x-1$　　B．$y=2\mathrm{e}^x-1$

C．$\ln|y+1|=x+C$　　D．$\ln|y+1|=x$

3．用分离变量法求解下列微分方程：

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{y\sqrt{1-x^2}}$；　　（2）$2x^2yy'=y^2+1$；

（3）$\sin y\cos x\mathrm{d}y=\cos y\sin x\mathrm{d}x$，且 $y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$．

4．求解下列一阶线性微分方程：

（1）$y'+ay=b\sin x$（其中 a、b 为常数）；　　（2）$xy'+y=x^2+3x+2$；

（3）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x}$，$y|_{x=\pi}=1$．

5．求解下列二阶常系数齐次线性微分方程：

（1）$y''-4y'=0$；　　（2）$y''-2y'+y=0$；

（3）$\begin{cases}y''-2y'=0,\\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=2;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}y''+25y=0,\\ y|_{x=0}=2,\ y'|_{x=0}=5.\end{cases}$

6．求解下列二阶常系数非齐次线性微分方程：

（1）$y''+5y'+4y=3-2x$；　　（2）$y''-y=4x\mathrm{e}^x$；

（3）$\begin{cases}y''+2y=\sin x,\\ y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1.\end{cases}$

7．一架飞机沿抛物线 $y=x^2+1$ 的轨道向地面俯冲，如图 4-37 所示，x 轴取在地面上．机翼到地面的距离以 100m/s 的固定速度减少．问机翼离地面 2501m 时，机翼影子在地面上运动的速度是多少（假设太阳光线是铅直的）？

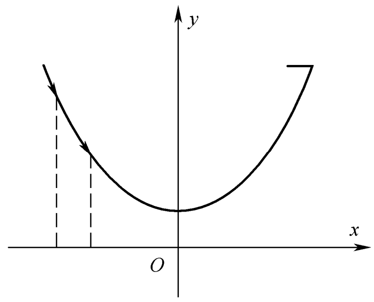

图 4-37　飞机俯冲时机翼影子的速度问题

复习题 4

1．填空题

（1）已知 $\int f(x)\mathrm{d}x = \cos 2x + C$，则 $f(x) =$________；

（2）设 x^3 为 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\mathrm{d}f(x) =$________；

（3）已知 $f(x) = \int (1-2x)^{100}\mathrm{d}x$，则 $f(x) =$________，$f'(0) =$________；

（4）$\int \dfrac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x =$________；

（5）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = -\cos x + C$，则 $f^{(n)}(x) =$________；

（6）$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x =$________，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^{x^2} f(t)\mathrm{d}t =$________；

（7）$\int_{-1}^{1}(1-\sin^3 x)\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x =$________；

（8）微分方程 $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - x^4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy^3 = 1$ 是________阶微分方程；

（9）微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解是________；

（10）微分方程 $y'' - 6y' + 9y = (x-1)\mathrm{e}^{3x}$ 的特解形式可设为________.

2．选择题

（1）$\int \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)'\mathrm{d}x =$（　　）；

A．$\dfrac{1}{1+x^2}$　　B．$\dfrac{1}{1+x^2} + C$　　C．$\arctan x$　　D．$\arctan x + C$

（2）$\dfrac{1+\ln x}{x}$ 的原函数是（　　）；

A．$(1+\ln x)^2 + C$　　B．$\dfrac{1}{2}\ln^2 x + C$

C．$\dfrac{1}{2}(1+\ln x)^2 + C$　　D．$\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)^2 + C$

（3）使 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$ 成立的 $f(x)$ 为（　　）；

A．$\dfrac{1}{x^2}$　　B．$\dfrac{1}{x}$　　C．e^{-x}　　D．$\dfrac{1}{1+x^2}$

（4）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x$ 为（　　）；

A．$2(1-x^2)^2 + C$　　B．$-2(1-x^2)^2 + C$

C．$\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$　　D．$-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$

（5）已知$\int_0^1 (2x+k)\mathrm{d}x = 2$，则$k=$（　　）；

A．0　　B．-1　　C．1　　D．$\frac{1}{2}$

（6）$\int_{-1}^{1} \frac{1+\sin x}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x =$（　　）；

A．$\frac{2\pi}{3}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{6}$　　D．0

（7）（　　）不是广义积分；

A．$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　B．$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$

C．$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2(x+1)}\mathrm{d}x$　　D．$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

（8）下列微分方程中（　　）是线性微分方程；

A．$y''-xy'+y^2=1$　　B．$y''-xy'+y=1$

C．$yy'=1$　　D．$y'+\mathrm{e}^{x+y}=1$

（9）下列函数中的（　　）是方程$(1-x)\mathrm{d}y=(1+y)\mathrm{d}x$的解．

A．$y=\frac{1}{1-x}$　　B．$y=\frac{1}{1-x}-1$

C．$y=\frac{1}{1-x}-2$　　D．$y=\frac{2}{1-x}$

3．积分计算．

（1）$\int \frac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x$；　（2）$\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$；　（3）$\int \frac{\sqrt{\ln x+2}}{x}\mathrm{d}x$；

（4）$\int x\cos x\mathrm{d}x$；　（5）$\int (x-1)\sin 2x\mathrm{d}x$；　（6）$\int x\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$；

（7）$\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$；　（8）$\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$；　（9）$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

（10）$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{2+\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　（11）$\int_0^1 y^2\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x$；　（12）$\int_0^1 t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}x$；

（13）$\int_0^{\ln 2} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$；　（14）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\mathrm{d}x$；　（15）$\int_0^{2\pi} x\cos^2 x\mathrm{d}x$；

（16）$\int_0^2 \ln(3+x)\mathrm{d}x$；　（17）$\int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；　（18）$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$（$a>0$）；

（19）$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　（20）$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；　（21）$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$．

4．定积分的几何应用．

（1）求抛物线$y=-x^2+4x-3$及在点$(0,-3)$和$(3,0)$处的切线所围成的面积；

（2）由$y=\mathrm{e}^x$及$x=1$、y轴和x轴所围成的图形绕x轴旋转，求旋转体的体积；

（3）由 $y=\dfrac{3}{x}$ 及 $y=4-x$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转，求旋转体的体积.

5．求解下列微分方程：

（1）$y'-\dfrac{y}{x}+\dfrac{2\ln x}{x}=0$；　（2）$y'+2xy+2x^3=0$；

（3）$y'+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$；　（4）$y'-\dfrac{1}{x+1}y=\mathrm{e}^x(x+1)$；

（5）$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+2x, \\ y(-1)=\dfrac{3}{2}; \end{cases}$　（6）$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x}=x\sin x, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1. \end{cases}$