

第3章 FLAC 本构模型与单元

知识点

- 弹性模型与开挖模型
- MC 与 DP 模型
- 应变硬化与软化模型
- 双屈服、剑桥、霍克布朗模型
- 梁、衬砌、锚索和桩单元
- 二维单元
- 三维单元

本章导读

本章主要介绍了有限差分数值模拟原理，先介绍基本原理，包括空间导数的有限差分近似、运动平衡方程、应变、应力及节点不平衡力和阻尼力的差分形式；再介绍本构方程和有限差分方程；介绍有限差分数值模拟分析的求解步骤；最后介绍了基于 MORH-COULOMB 塑性模型的增量弹性理论、屈服准则、流动法则、塑性应力调整的有限差分形式。

3.1 弹性模型和开挖模型

本节主要介绍弹性模型和开挖模型，其中弹性模型包括各向同性和横观各向异性两种情况。

3.1.1 弹性模型

1. 各向同性弹性模型

各向同性弹性模型提供了材料性质最简单的表达方式，这种模型适用于应力应变特性呈线性关系的无卸载滞后现象的均质、各向同性、连续性材料。

在此种本构模型中，应力应变关系依胡克定律，用应变增量的形式表达。其表面应变的表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_{11} &= \alpha_1\Delta e_{11} + \alpha_2\Delta e_{22} \\ \Delta\sigma_{22} &= \alpha_2\Delta e_{12} + \alpha_1\Delta e_{22} \\ \Delta\sigma_{12} &= 2G\Delta e_{12} (\Delta e_{21} = \Delta e_{12}) \\ \Delta\sigma_{33} &= \alpha_2(\Delta e_{11} + \Delta e_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

式中， $\alpha_1 = K + (4/3)G$ ； $\alpha_2 = K - (2/3)G$ ； K 为体积模量； G 为剪切模量。

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \Delta t \quad (3-2)$$

式中, Δe_{ij} 为应力张量增量; u 为体积模量; Δt 为时步。

在平面应力下, 这些等式为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= \beta_1 \Delta e_{11} + \beta_2 \Delta e_{22} \\ \Delta \sigma_{22} &= \beta_2 \Delta e_{11} + \beta_1 \Delta e_{22} \\ \Delta \sigma_{12} &= 2G \Delta e_{12} (\Delta \sigma_{21} = \Delta \sigma_{12}) \\ \Delta \sigma_{33} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

式中, $\beta_1 = \alpha_1 - (\alpha_2^2 / \alpha_1)$; $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_2^2 / \alpha_1)$ 。

对于轴对称几何体:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= \alpha_1 \Delta e_{11} + \alpha_2 (\Delta e_{22} + \Delta e_{33}) \\ \Delta \sigma_{22} &= \alpha_{1\Delta} e_{22} + \alpha_2 (\Delta e_{11} + \Delta e_{33}) \\ \Delta \sigma_{12} &= 2G \Delta e_{12} (\Delta \sigma_{21} = \Delta \sigma_{12}) \\ \Delta \sigma_{33} &= \alpha_1 \Delta e_{33} + \alpha_2 (\Delta e_{11} + \Delta e_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

2. 横观各向异性弹性模型

各向异性弹性模型适用于模拟在各层的法向方向和切向方向的弹性模量有明显差异的层状弹性介质。

在 FLAC 中, 各向同性平面位于这个模型的 xz 平面, 各弹性模量的定义如下:

E_1 (E_x) 各向同性面的弹性模量;

E_2 (E_y) 与各向同性面垂直平面的弹性模量;

G_{12} (G_{xy}) 各向同性面垂直面的交叉剪切弹性模量;

G_{13} (G_{xz}) 各向同性面的剪切模量;

ν_{12} (ν_{yx}) 由 y 方向的单轴应力引起的各向同性面的 x 方向上的法向应变相关垂直面上的 y 方向上的法向应变的泊松比;

ν_{31} (ν_{zx}) 由 z 方向的单轴应力引起的各向同性面的 x 方向上的法向应变相关垂直面上的 z 方向上的法向应变的泊松比;

弹性性质的变化是受限制的 (Amadei 1982), 因此应用了以下限制条件:

$$\left. \begin{aligned} E_x &> 0 \\ E_y &> 0 \\ G_{xy} &> 0 \\ \nu_{xy}^2 &\leq 1 \\ \nu_{xz}^2 &\leq 1 \\ (1 - \nu_{xz}) - \frac{2E_x \nu_{yz}^2}{E_y} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

对于常见的正交各向异性弹性体, 应力—应变关系式由 Lekhnitskii 给出:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta e_{11} &= S_{11}\Delta\sigma_{11} + S_{12}\Delta\sigma_{22} + S_{13}\Delta\sigma_{33} + S_{16}\Delta\sigma_{12} \\
 \Delta e_{22} &= S_{12}\Delta\sigma_{11} + S_{22}\Delta\sigma_{22} + S_{23}\Delta\sigma_{33} + S_{26}\Delta\sigma_{12} \\
 \Delta e_{33} &= S_{13}\Delta\sigma_{11} + S_{23}\Delta\sigma_{22} + S_{33}\Delta\sigma_{33} + S_{36}\Delta\sigma_{12} \\
 \Delta e_{23} &= \frac{1}{2}[(S_{44}\Delta\sigma_{23}) + (S_{45}\Delta\sigma_{13})] \\
 \Delta e_{13} &= \frac{1}{2}[(S_{45}\Delta\sigma_{23}) + (S_{55}\Delta\sigma_{13})] \\
 \Delta e_{12} + \frac{1}{2}[(S_{16}\Delta\sigma_{11}) + (S_{26}\Delta\sigma_{22}) + (S_{36}\Delta\sigma_{33}) + (S_{66}\Delta\sigma_{12})]
 \end{aligned} \right\} \quad (3-6)$$

其中 S_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4, 5, 6$) 是与 E_i ($i=1, 2, 3$), G_{12} , G_{13} , G_{23} 和 ϕ 有关的变量, 其中 ϕ 是从 x 轴逆时针算起的各向异性角。

将 xy 平面进行如下设置, 可以获得平面应力状态:

$$\Delta\sigma_{33} = \Delta\sigma_{13} = \Delta\sigma_{23} = 0$$

根据以上设置, 等式 (3-6) 可以写成如下的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta e_{11} \\ \Delta e_{22} \\ \Delta e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{15} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

通过矩阵转置可以很容易地得出大批应力应变关系。

将 xy 平面进行如下设置, 可以获得平面应变状态:

$$\Delta e_{33} = \Delta e_{13} = \Delta e_{23} = 0$$

这种假设可以获得应力应变的如下关系式:

$$\begin{bmatrix} \Delta e_{11} \\ \Delta e_{22} \\ 0 \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{36} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\sigma_{11} \\ \Delta\sigma_{22} \\ \Delta\sigma_{33} \\ \Delta\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

通过矩阵转置也可以得出到应力应变关系。

3.1.2 开挖模型

Null Model 模型用于模拟隧道工程中围岩土体的开挖, 即围岩材料一旦被赋予 Null Model 后, 表示该部分土体被移去或者开挖掉了。同时, 在 Null Model 模型区材料的应力自动设置为 0。

3.2 M-C 和 D-P 塑性模型

在有限元模拟分析中, 采用 M-C 和 D-P 塑性模型来模拟隧道结构周围的土体、加固圈和注浆材料, 以下分别介绍这两种模型。

3.2.1 Mohr-Coulomb 塑性模型

1. 增量弹性理论

在 FLAC 中，摩尔-库仑模型采用主应力 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和平面外应力 σ_{zz} 表示。主应力和主方向由应力张量分量计算（以压应力为负）。

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \tag{3-9}$$

相应的主应变增量 Δe_1 、 Δe_2 、 Δe_3 分解为 $\Delta e_i = \Delta e_i^e + \Delta e_i^p$ 。这里上标 e 和 p 分别表示弹性和塑性部分，塑性分量只在塑性流动阶段不为零。胡克定律的主应力和主应变的增量表达式为：

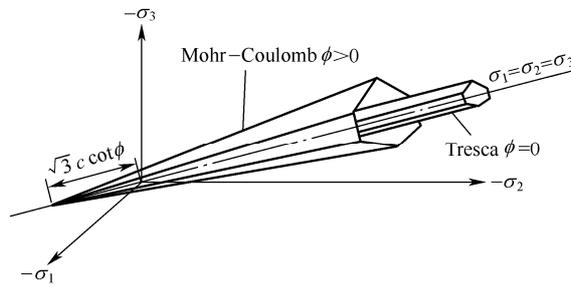
$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \alpha_1 \Delta e_1^e + \alpha_2 (\Delta e_2^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta \sigma_2 &= \alpha_1 \Delta e_2^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta \sigma_3 &= \alpha_1 \Delta e_3^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_2^e) \end{aligned} \right\} \tag{3-10}$$

式中， $\alpha_1 = K + (4/3)G$ ， $\alpha_2 = K - (2/3)G$ 。

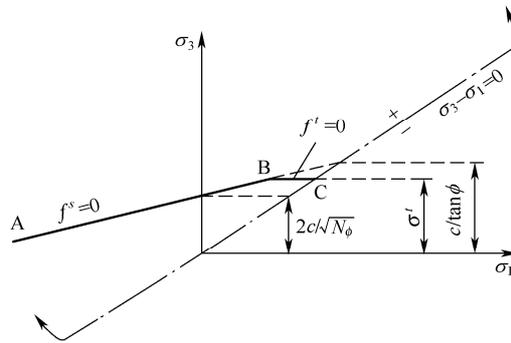
2. 屈服准则和流动法则

基于式 (3-9) 的假设，在应力空间和 (σ_1, σ_3) 平面的破坏准则可表示为图 3-1 的形式。由摩尔-库仑屈服函数定义的从 A 点到 B 点的破坏包络线为：

$$f^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \tag{3-11}$$



(a)



(b)

图 3-1 岩土材料 Mohr-Coulomb 模型及破坏准则

由 B 点到 C 点拉应力屈服函数的定义为 $f^t = \sigma^t - \sigma_3$, $N_\phi = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$, $\sigma'_{\max} = \frac{c}{\tan \phi}$, ϕ 为摩擦角, c 为凝聚力, σ^t 为抗拉强度, 材料强度不超过 σ'_{\max} 。

剪切势函数 g^s 对应于非关联的流动法则, 即: $g^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi$ 。

势函数 g^t 对应于拉应力破坏的相关联流动法则, 即: $g^t = -\sigma_3$ 。

对于剪切应力和拉应力处于边界的情况, 可由摩尔—库仑流动法则, 并通过定义三维应力空间中边界附近的混合屈服函数进行计算。定义函数 $h(\sigma_1, \sigma_3) = 0$ 用以表示 (σ_1, σ_3) 平面中 $f^s = 0$ 和 $f^t = 0$ 所代表曲线的对角线, 该函数的表达式为:

$$h = \sigma_3 - \sigma^t + \alpha^p (\sigma_1 - \sigma^p) \quad (3-12)$$

这里, α^p 和 σ^p 为两个常量, $\alpha^p = \sqrt{1 + N_\phi^2} + N_\phi$, $\sigma^p = \sigma^t N_\phi - 2c\sqrt{N_\phi}$ 。

弹性假设和破坏准则不一样, 分别在 (σ_1, σ_3) 平面中位于 1 区域和 2 区域(对应于 $h = 0$ 区域内-或+区域), 如图 3-2 所示。如果位于 1 区, 则属于剪切破坏, 应用由势函数 g^s 确定的流动准则, 应力回归到 $f^s = 0$ 的曲线上; 如果位于 2 区, 则属于拉应力破坏, 应用由势函数 g^t 确定的流动准则, 应力点回归到 $f^t = 0$ 的曲线上。

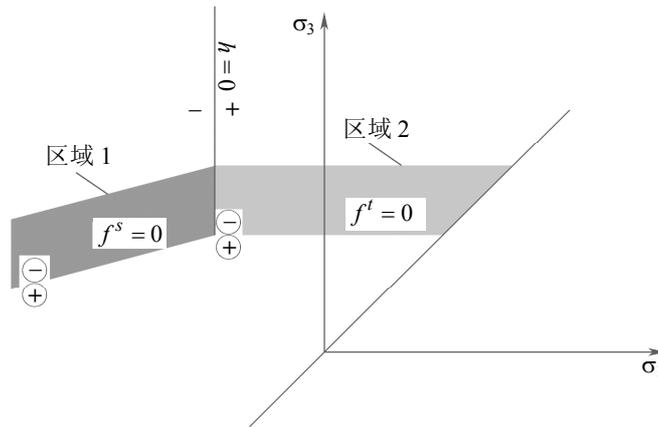


图 3-2 流动准则的区域定义

3. 塑性应力调整

首先是剪切破坏, 其流动法则为 $\Delta e_i^p = \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_i}$ ($i=1, 3$), 这里 λ^s 为待定参数, 通过偏微分后, 此式变为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^p &= \lambda^s \\ \Delta e_2^p &= 0 \\ \Delta e_3^p &= -\lambda^s N_\phi \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

弹性应变增量可以从总增量中减去塑性增量, 进一步利用上式的流动法则, 式 (3-10) 中的弹性法则变为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_2 + \Delta e_3) - \lambda^s(\alpha_1 - \alpha_2 N_\phi) \\ \Delta\sigma_2 &= \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_3) - \lambda^s\alpha_2(1 - N_\phi) \\ \Delta\sigma_3 &= \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_2) - \lambda^s(-\alpha_1 N_\phi + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

让新旧的应力状态分别由上标 N 和 O 表示，然后通过定义：

$$\sigma_i^N = \sigma_i^O + \Delta\sigma_i \quad (3-15)$$

用此式代替式 (3-14)，并用上标 I 表示由弹性假设得到的应变和原应变之和，则总应变计算得到的弹性增量为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^I &= \sigma_1^O + \alpha_1\Delta e_1 + \alpha_2(\Delta e_2 + \Delta e_3) \\ \sigma_2^I &= \sigma_2^O + \alpha_1\Delta e_2 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_3) \\ \sigma_3^I &= \sigma_3^O + \alpha_1\Delta e_3 + \alpha_2(\Delta e_1 + \Delta e_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-16)$$

对于拉应力破坏的情况，流动法则为：

$$\Delta e_i^p = \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma_i} \quad (i=1, 3) \quad (3-17)$$

这里 λ^t 是待定的参数，用式 (3-17) 中的 g^t ，通过偏微分后，此式变为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^p &= 0 \\ \Delta e_2^p &= 0 \\ \Delta e_3^p &= -\lambda^t \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

重复上面相似的原理，可得到：

$$\left[\begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1^I + \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I + \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I + \lambda^t \alpha_1 \end{aligned} \right] \quad (3-19)$$

其中：

$$\lambda^t = \frac{f^t(\sigma_3^I)}{\alpha_1} \quad (3-20)$$

3.2.2 Drucker-Prager 塑性模型

德鲁克—普拉格 (Drucker-Prager) 塑性模型非常适用于模拟摩擦角较小的软粘土，但此模型在岩土工程材料中应用较少，将它包括进 FLAC 程序中主要是用来同其他程序进行比较。

这种模型的破坏包络线包括 Drucker-Prager 准则和拉应力路径。与剪切流动法则不相关联而与拉伸法则相关联。

1. 增量弹性法则

德鲁克—普拉格模型由两个应力分量表示——剪切应力 τ 和平均法应力 σ ，两者分别定义为：

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \sqrt{J_2} \\ \sigma &= \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{aligned} \right\} \quad (3-21)$$

这里 J_2 是偏应力张量第二不变量，它可以表示为：

$$J_2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2] + \sigma_{12}^2 \quad (3-22)$$

同 τ 和 σ 有关的剪应变增量 $\Delta\gamma$ 和体积应变增量 Δe 可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma &= 2\sqrt{\Delta J_2} \\ \Delta e &= \Delta e_{11} + \Delta e_{22} + \Delta e_{33} \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

ΔJ_2 是偏应变增量第二不变量，其表达式为：

$$\Delta J_2 = \frac{1}{6}[(\Delta e_{11} - \Delta e_{22})^2 + (\Delta e_{22} - \Delta e_{33})^2 + (\Delta e_{11} - \Delta e_{33})^2] + \Delta e_{22}^2 \quad (3-24)$$

应变增量可分解为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma &= \Delta\gamma^e + \Delta\gamma^p \\ \Delta e &= \Delta e^e + \Delta e^p \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

上标 e 和 p 分别表示弹性和塑性部分，并且塑性分量仅用在塑性流动阶段不为零的情况。用通常的应力应变表示的胡克定律的增量表达式为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau &= G\Delta\gamma^e \\ \Delta\sigma &= K\Delta e^e \end{aligned} \right\} \quad (3-26)$$

G 和 K 分别表示剪切模量和体积模量。

2. 屈服函数和势函数

主应力空间中 σ, τ 平面内的破坏准则如图 3-3 所示。

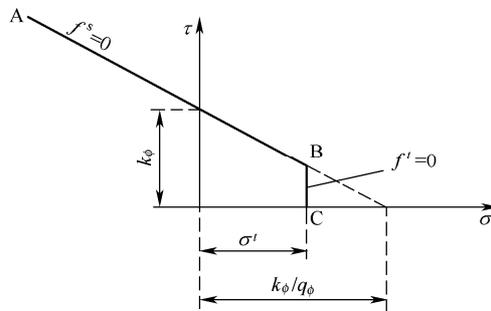


图 3-3 德鲁克-普拉格模型破坏准则

由 Drucker-Prager 屈服函数确定的从点 A 到点 B 的破坏包络线为：

$$f^s = \tau + q_\phi \sigma - k_\phi \quad (3-27)$$

由拉应力屈服函数确定从点 B 到点 C 的破坏包络线为：

$$f^t = \sigma - \sigma^t \quad (3-28)$$

式中， q_ϕ 和 k_ϕ 为有关材料特性的常数。

拉应力强度不能超过
$$\sigma_{\max}^t = \frac{k_\phi}{q_\phi} \quad (3-29)$$

剪切势函数 g^s 通常对于不相关联的流动法则，其表达式如下：

$$g^s = \tau + q_\psi \sigma \quad (3-30)$$

式中， q_ψ 为材料常数，当采用相关流动法则时，其值等于 q_ϕ 。

拉应力破坏对于相关联的流动法则，其表达式来源于势函数 g^t ：

$$g^t = \sigma \quad (3-31)$$

对于边界附近，Drucker-Prager 的流动法则有如下所示的表达方法，定义函数 $h(\sigma, \tau) = 0$ 用以表示 (σ, τ) 平面，见图 3-4 中 $f^s = 0$ 和 $f^t = 0$ 所代表曲线的对角线，此函数的表达式为：

$$h = \tau - \tau^p - \alpha^p (\sigma - \sigma^t) \quad (3-32)$$

τ^p 和 α^p 两个常量的定义如下：

$$\left. \begin{aligned} \tau^p &= k_\phi - q_\phi \sigma^t \\ \alpha^p &= \sqrt{1 + q_\phi^2} - q_\phi \end{aligned} \right\} \quad (3-33)$$

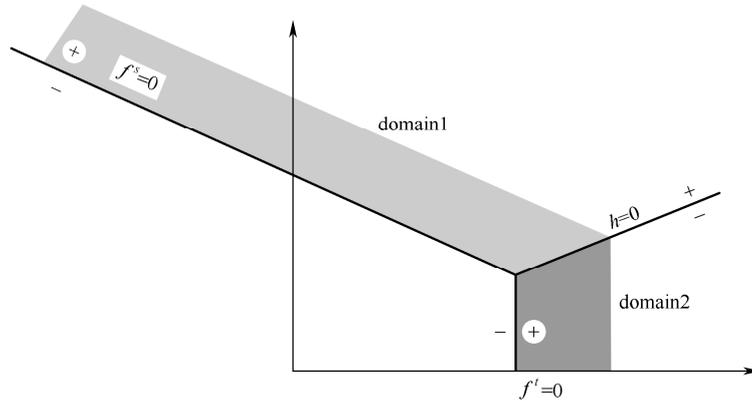


图 3-4 流动准则的区域定义

弹性假设和破坏准则不一致，分别在 (σ, τ) 平面中位于 1 区和 2 区（分别对应于 $h=0$ 区域内正或负区域）。如果位于 1 区，说明是剪切破坏，应用由势函数 g^s 确定的流动法则，应力点回归到 $f^s = 0$ 的曲线上。如果位于 2 区，说明是拉应力破坏，应用由势函数 g^t 确定的流动法则，应力点回归到 $f^t = 0$ 的曲线上。

3. 塑性修正

首先考虑塑性破坏，流动法则如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \gamma^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \tau} \\ \Delta e^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

这里 λ^s 是待定义的参数，用式 (3-29) 的 g^s ，通过偏微分后，此式变为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma^p &= \lambda^s \\ \Delta e^p &= \lambda^s q_\psi \end{aligned} \right\} \quad (3-35)$$

弹性应变增量可以从式 (3-25) 表示的总增量减去塑性增量, 进一步用式 (3-35) 的流动法则, 式 (3-25) 中的弹性法则变为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau &= G\Delta\gamma - G\lambda^s \\ \Delta\sigma &= k\Delta e - kq_\psi\lambda^s \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

让新旧的应力状态分别由上标 N 和 O 表示, 然后通过定义:

$$\left. \begin{aligned} \tau^N &= \tau^O + \Delta\tau \\ \sigma^N &= \sigma^O + \Delta\sigma \end{aligned} \right\} \quad (3-37)$$

上标 I 表示由弹性假设得到的应变和原来应变之和, 由总应变计算得到的弹性增量即为:

$$\left. \begin{aligned} \tau^I &= \tau^O + G\Delta\gamma \\ \sigma^I &= \sigma^O + K\Delta e \end{aligned} \right\} \quad (3-38)$$

现在可以定义:

$$\sigma_{ij}^N = (\sigma_{ij}^I - \sigma^I) \frac{\tau^N}{\tau^I} + \sigma^N \delta_{ij} \quad (3-39)$$

其中 δ_{ij} 为克罗内克 (Kronecker) 符号。

现在考虑拉应力破坏, 流动法则的形式为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \tau} \\ \Delta e^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3-40)$$

这里 λ^t 是待定参数, 用式 (3-30) 中的 g^t , 通过偏微分后, 此式变为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\gamma^p &= 0 \\ \Delta e^p &= \lambda^t \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

重复上面相似的推理, 可得到:

$$\left. \begin{aligned} \tau^N &= \tau^I \\ \sigma^N &= \sigma^I - K\lambda^t \end{aligned} \right\} \quad (3-42)$$

其中:

$$\lambda^t = \frac{\sigma^I - \sigma^t}{K} \quad (3-43)$$

在该模型的破坏模式中, 对应于弹性假设的新的应力偏量可以写成:

$$\sigma_{ij}^N = \sigma_{ij}^I + (\sigma^t - \sigma^I) \delta_{ij} \quad (3-44)$$

3.3 应变硬化—软化模型

本节将主要介绍应变硬化与软化模型、节理化模型和双线性应变硬化与软化节理模型。

3.3.1 应变硬化与软化模型

在FLAC中,这种模型是基于剪切流动法则不相关联而与拉力流动法则相关联的摩尔-库仑模型,差别在于塑性屈服开始后,粘聚力、摩擦角、剪胀扩容和抗拉强度可能发生变化。在摩尔-库仑模型中,这种性质都假定保持为常量。用户可以自己定义粘聚力、摩擦角和剪胀为硬化参数的分段线性函数,这些硬化参数量测塑性剪切应变。抗拉强度软化法则也可被设定为其他量测塑性拉应变的硬化参数的分段线性函数。这种模型通过在每个时步增加硬化参数以计算总的塑性剪切应变和拉应变,并以此促使材料性质同用户定义的函数保持一致。

对于屈服函数和势函数,塑性流动法则和应力修正同摩尔-库仑模型完全一致。

1. 硬化-软化参数

塑性剪切应变由剪切硬化参数 e^{ps} 计算, e^{ps} 的增量形式的定义如下(Vermeer,deBorst 1984):

$$\Delta e^{ps} = \left\{ \frac{1}{2}(\Delta e_1^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2}(\Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2}(\Delta e_3^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-45)$$

其中:

$$\Delta e_m^{ps} = \frac{1}{3}(\Delta e_1^{ps} + \Delta e_3^{ps}) \quad \Delta e_m^{ps} \quad (m=1, 2, 3) \text{ 是塑性剪切应变主增量。}$$

抗拉硬化参数 e^{pt} 用于计算累积的张拉塑性应变,它的增量定义为:

$$\Delta e^{pt} = \Delta e_3^{pt} \quad (3-46)$$

这里 Δe_3^{pt} 是主应力方向上的张拉塑性应变增量(拉应力为正)。

以上用到的以及以后在相似的表达式中将用到的一些符号值得进行一些说明。 Δe_m^{ps} 同式(3-34)中定义的 Δe_m^p 是一致的,这里 $m=1, 2, 3$ 。增加上标 s 表示塑性应变同剪切屈服面(而不是拉伸屈服面 0)相关。注意 Δe_i^{ps} 是塑性主应变增量而不是剪切应变增量。相似地, Δe_3^{pt} 同式(3-39)中定义的 Δe_3^p 是一致的,上标 t 表示塑性应变是同拉伸屈服面相关的。

2. 用户自定义函数的材料模型

考虑一维的应力-应变曲线 $\sigma - e$,它在达到屈服时开始软化但仍保留一定的残余强度。

达到屈服点之前,曲线是线性的,在此阶段,只产生弹性应变, $e = e^e$,材料屈服后,总应变由弹性应变和塑性应变两部分组成, $e = e^e + e^p$ 。在软化/硬化模型中,用户定义粘聚力、摩擦角、剪胀角和抗拉强度这些变量作为总应变中塑性应变部分 e^p 的函数,在FLAC中,这些函数也可以由各线性线段近似表示。

粘聚力、摩擦角和剪胀角的硬化和软化特性,由用户以表格的形式通过剪切参数 e^{ps} (式3-45)表示,每个表格包含一对值:一个表示参数,另一个表示对应的特性值。它假定特性变量在表格中的两个连续的参数目之间是线性的。抗拉强度的软化通过同样的方法由参数 e^{pt} (式3-46)来表示。

3.3.2 节理化模型

节理化模型是各向异性塑性模型，它包含在摩尔—库仑体内特殊方向上的弱面。根据应力状态，弱面走向以及模型体和弱面的材料特性不同，屈服可能发生在模型体内，或者发生在弱面上，或者在两个部位同时发生。

这种模型在 FLAC 中的实现方法是首先判别总体破坏，同时应用与 FLAC 中摩尔—库仑模型中相同的相关塑性修正。弱面内的破坏准则存在于包含在拉应力路径的摩尔—库仑屈服条件的局部形式中，与局部剪切流动法则不相关联而与局部拉应力流动法则相关联。

为了简化这部分符号，我们定义 σ_{ij} ，它对应于由各阶段总体破坏的塑性修正的应用引起的应力分量，这种总应力分解成局部应力后可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 Q + 2\sigma_{12} \sin Q \cos Q + \sigma_{22} \sin^2 Q \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 Q - 2\sigma_{12} \sin Q \cos Q + \sigma_{22} \cos^2 Q \\ \sigma'_{33} &= \sigma_{33} \\ \sigma'_{12} &= -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin Q \cos Q + \sigma_{12} (\cos^2 Q - \sin^2 Q) \end{aligned} \right\} \quad (3-47)$$

式中， Q 为节理夹角（从 x 坐标轴逆时针方向算起）。

依照约定，由 τ 表示弱面上切向引力分量的大小，相应的应变变量为 γ ，可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \tau &= |\sigma'_{12}| \\ \lambda &= |e_{12}| \end{aligned} \right\} \quad (3-48)$$

有了这两个符号，弹性增量法则的局部表达式可以表示为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma'_{11} &= \alpha_1 \Delta e_{11}^e + \alpha_2 (\Delta e_{22}^e + \Delta e_{33}^e) \\ \Delta \sigma'_{22} &= \alpha_1 \Delta e_{22}^e + \alpha_2 (\Delta e_{11}^e + \Delta e_{33}^e) \\ \Delta \sigma'_{33} &= \alpha_1 \Delta e_{22}^e + \alpha_2 (\Delta e_{11}^e + \Delta e_{22}^e) \\ \Delta \tau &= 2G \Delta \gamma^e \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

式中， $\alpha_1 = K + 4G/3$ ， $\alpha_2 = K - 2G/3$ ，上标 e 代表“弹性部分”。

将摩尔—库仑破坏准则定义为 $f^s = 0$ ，从点 A 到点 B 的局部破坏包络线的定义为：

$$f^s = -\tau - \sigma'_{22} \tan \phi_j + c_j \quad (3-50)$$

将拉应力破坏准则定义为 $f^t = 0$ ，从点 B 到点 C 的局部破坏包络线的定义为：

$$f^t = \sigma_j^t - \sigma'_{22} \quad (3-51)$$

式中， ϕ_j ， c_j 和 σ_j^t 分别为弱面的摩擦角、粘聚力和抗拉强度。

注意：对于摩擦角不为零的弱面，抗拉强度的最大值定义如下：

$$\sigma_{j,\max}^t = \frac{c_j}{\tan \phi_j} \quad (3-52)$$

剪切和张拉势函数 g^s 和 g^t 对应于不相关联的流动法则，剪胀角 ψ_j 对应于相关联的流动法则，它们分别表示为：

$$\begin{aligned} g^s &= -\tau - \sigma'_{22} \tan \psi_j \\ g^t &= -\sigma'_{22} \end{aligned} \quad (3-53)$$

破坏准则边界附近的流动法则用 FLAC 中摩尔—库仑模型中所述的方法定义。这里，由函数 $h(\sigma'_{22}, \tau) = 0$ 表示 (σ'_{22}, τ) 平面中 $f^s = 0$ 和 $f^t = 0$ 曲线的对角线，此函数形式为：

$$h = \tau - \tau_j^p - \alpha_j^p (\sigma'_{22} - \sigma_j^t) \quad (3-54)$$

其中 τ_j^p 和 α_j^p 是两个常量，定义如下：

$$\left. \begin{aligned} \tau_j^p &= c_j - \tan \phi_j \sigma_j^t \\ \alpha_j^p &= \sqrt{1 + \tan^2 \phi_j} - \tan \phi_j \end{aligned} \right\} \quad (3-55)$$

弹性假设和破坏准则不一致，分别在 (σ'_{22}, τ) 平面中位于 1 区或 2 区（分别对应于 $h=0$ 区域内-或+区域）。如果位于 1 区，说明平面内是剪切破坏，应用势函数 g^s 确定的流动法则，应力点回归到 $f^s = 0$ 的曲线上。如果位于 2 区，说明局部拉应力破坏势函数 g^t 确定的流动法则，应力点回归到 $f^t = 0$ 的曲线上。

首先考虑平面内的剪切破坏，流动法则如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_{11}^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{11}} \\ \Delta e_{22}^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{22}} \\ \Delta e_{33}^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma'_{33}} \\ \Delta \gamma^p &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

其中上标 p 表示弱面上同破坏有关的塑性部分， λ^s 是待定参数，应用式 (3-51) 的 g^s ，进行偏微分后，上式可写为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_{11}^p &= 0 \\ \Delta e_{22}^p &= -\lambda^s \tan \psi_j \\ \Delta e_{33}^p &= 0 \\ \Delta \gamma^p &= -\lambda^s \end{aligned} \right\} \quad (3-57)$$

最终，由于局部应力修正而分解到总体坐标轴下得到的弱面上剪切破坏的总应力修正式为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= -2\Delta \sigma'_{12} (\cos \theta \sin \theta) + \Delta \sigma'_{11} \cos^2 \theta + \Delta \sigma'_{22} \sin^2 \theta \\ \Delta \sigma_{22} &= 2\Delta \sigma'_{12} (\cos \theta \sin \theta) + \Delta \sigma'_{11} \sin^2 \theta + \Delta \sigma'_{22} \cos^2 \theta \\ \Delta \sigma_{33} &= \Delta \sigma'_{33} \\ \Delta \sigma_{12} &= \Delta \sigma'_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\Delta \sigma'_{11} - \Delta \sigma'_{22}) \cos \theta \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-58)$$

这些修正被添加到应力分量 σ_{ij} 上， σ_{ij} 包括总体破坏的应力修正，即这些应力修正会计算

出该时步新的应力状态。

现在考虑弱面上的拉应力破坏，这种情况下，流动法则的形式为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e'_{11}{}^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{11}} \\ \Delta e'_{22}{}^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{22}} \\ \Delta e'_{33}{}^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \sigma'_{33}} \\ \Delta e'_{33}{}^p &= \lambda^t \frac{\partial g^t}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (3-59)$$

这里 λ^t 是待定参数，应用式 (3-53) 的 g^t ，进行偏微分后，上式可写为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e'_{11}{}^p &= 0 \\ \Delta e'_{22}{}^p &= -\lambda^t \\ \Delta e'_{33}{}^p &= 0 \\ \Delta \lambda^p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

应用如上推理，可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{11}^N &= \sigma'_{11} + \lambda^t \alpha_2 \\ \Delta \sigma_{22}^N &= \sigma'_{22} + \lambda^t \alpha_1 \\ \Delta \sigma_{33}^N &= \sigma'_{33} + \lambda^t \alpha_2 \\ \tau^N &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

$$\lambda^t = \frac{f^t(\sigma'_{22})}{\alpha_1}$$

分解到整体坐标系轴下后，应力修正变成：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_{11} &= (\sigma^t - \Delta \sigma'_{22}) \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \\ \Delta \sigma_{22} &= (\sigma^t - \Delta \sigma'_{22}) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \right) \\ \Delta \sigma_{33} &= (\sigma^t - \Delta \sigma'_{22}) \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \Delta \sigma_{12} &= -(\sigma^t - \Delta \sigma'_{22}) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \cos \theta \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

在大应变模式下，为考虑由于刚体转动和变形引起的转动，对软弱面的方位角 θ 进行调整，修正值 $\Delta\theta$ 由一个区域内所用角度的平均值得出，其表达式为：

$$\Delta\theta = e'_{12} + \omega \quad (3-63)$$

其中：

$$\left. \begin{aligned} e'_{12} &= -(e_{11} - e_{12})\sin\theta\cos\theta + e_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ \omega &= \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) \end{aligned} \right\} \quad (3-64)$$

以 $\Delta\theta$ 以弧度形式表示。

3.3.3 双线性应变硬化—软化的节理化模型

双线性应变硬化—软化的节理化模型是本章所描述的节理化模型的推广。在双线性模型中,岩土介质和节理的破坏包络线是由两个摩尔—库仑准则和依照规定法则将硬化或软化的拉应力路径合成的。非相关联流动法则适用于剪切塑性流动,相关联流动法则适用于张拉塑性流动。

对于岩土介质和节理的软化特性,可用四个独立的硬化参数描述,其中两个参数用于介质基体,另外两个用于节理,它们分别计算塑性剪切应变和塑性张拉应变。这种数值模型中,首先判断总体破坏并应用相应的塑性修正,然后分析弱面上的应力破坏并对应力进行更新。如果发生塑性流动,且根据用户输入表格的参数调整岩土介质和节理的粘聚力、摩擦角、剪胀角和抗拉强度参数值,那么硬化参数是增加的。

1. 岩土介质破坏依据和流动法则

破坏包络线由两个摩尔—库仑破坏准则定义: $f_2^s = 0$ 对应于 AB 段, $f_1^s = 0$ 对应于 BC 段,拉应力破坏准则 $f^t = 0$ 对应于 CD 段。剪切破坏依据通常表示为 $f^s = 0$, 它由两个特征值粘聚力 C 和摩擦角 ϕ 来描述, 其中 c_2 和 ϕ_2 对应于 AB 段, c_1 和 ϕ_1 对应于 BC 段。张拉破坏判据由拉伸强度 σ^t (正值) 表示, 可以得到:

$$f^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \quad (3-65)$$

$$f^t = \sigma_3 - \sigma^t \quad (3-66)$$

上式中:

$$N_\phi = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} \quad (3-67)$$

σ_3 对应于 $f_2^s = 0$ 和 $f_1^s = 0$ 的交集, 由下式给出:

$$\sigma_3^I = \frac{2c_2\sqrt{N_{\phi_2}} - 2c_1\sqrt{N_{\phi_1}}}{N_{\phi_2} - N_{\phi_1}} \quad (3-68)$$

注意剪切包络线上 BC 表现出来的拉应力特征, 对于摩擦角 $\phi_1 \neq 0$ 的材料, 拉应力强度的最大值为:

$$\sigma_{\max}^t = \frac{c_1}{\tan\phi_1} \quad (3-69)$$

模型的公式表达中, 应力的弹性假设首先由总应变增量来判断。如果相应的应力点在 (σ_1^I, σ_3^I) , 在破坏面的外侧, 则判断发生塑性屈服。在这种情况下, 应力修正必须应用到弹性假设中。为恢复到与 AB、BC 或 CD 上的应力点位置相关的 $f_2^s = 0$ 、 $f_1^s = 0$ 和 $f^t = 0$ 的状态, 允许发生塑性流动以确定修正应力。

通常假定总应变增量由弹性应变增量和塑性应变增量两部分组成, 塑性屈服的流动法

则是：

$$\Delta e_i^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_i} \quad i=1, 3 \quad (3-70)$$

对应于非相关联流动法则的剪切屈服势函数 g^s 可表示为：

$$g^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\psi \quad (3-71)$$

式中，破坏的 AB 段的剪胀角 ψ 等于 ψ_1 ：

$$N_\psi = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \quad (3-72)$$

对应于相关联流动法则的张拉屈服势函数 g^t 可表示为：

$$g^t = \sigma_3 \quad (3-73)$$

对应于剪切破坏的塑性应变增量的形式可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^{ps} &= \lambda^s \\ \Delta e_2^{ps} &= 0 \\ \Delta e_3^{ps} &= -\lambda N_\psi \end{aligned} \right\} \quad (3-74)$$

对于剪切破坏的应力修正：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= -\lambda^s (\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) \\ \Delta \sigma_2 &= -\lambda^s \alpha_2 (1 - N_\psi) \\ \Delta \sigma_3 &= -\lambda^s (-\alpha_1 N_\psi + \alpha_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-75)$$

式中：

$$\alpha_1 = K + \frac{4}{3}G \quad \alpha_2 = K - \frac{2}{3}G \quad (3-76)$$

$$\lambda^s = \frac{\sigma_1^I - \sigma_3^I N_\psi + 2c\sqrt{N_\psi}}{(\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) - (-\alpha_1 N_\psi + \alpha_2) N_\psi}$$

同理，张拉破坏的塑性应变增量可表示为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^{pt} &= 0 \\ \Delta e_2^{pt} &= 0 \\ \Delta e_3^{pt} &= \lambda^t \end{aligned} \right\} \quad (3-77)$$

对于张拉破坏的应力修正：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= -\lambda^t \alpha_2 \\ \Delta \sigma_2 &= -\lambda^t \alpha_2 \\ \Delta \sigma_3 &= -\lambda^t \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-78)$$

其中：

$$\lambda^t = \frac{\sigma_3^I - \sigma^t}{\alpha_1} \quad (3-79)$$

2. 弱面的破坏判据和流动法则

对岩土介质中塑性流动校正的应力，可以分解为平行和垂直于弱面的分量，并且可以测试节理面的破坏。破坏依据可以用弱面上的拉应力切向分量 $\tau = |\sigma'_{12}|$ 和法向分量 σ'_{22} 的大小表示。

剪切判据通常表示为 $f^s = 0$ ，它由两个变量粘聚力和摩擦角 c_j 、 ϕ_j 描述，其值等于 c_{j2} 、 ϕ_{j1} 。张拉破坏判据由拉应力强度 σ'_i （正值）表示，可得到：

$$f^s = \tau + \sigma'_{22} \tan \phi_j - c_j \quad (3-80)$$

$$f^t = \sigma'_{22} - \sigma'_j \quad (3-81)$$

注意：对于摩擦角 ϕ_{j1} 不为零的弱面，抗拉强度的最大值为：

$$\sigma'_{j,\max} = \frac{c_{j1}}{\tan \phi_{j1}} \quad (3-82)$$

塑性屈服的流动法则为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e'_{22}{}^{ps} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'_{22}} \\ \Delta \gamma^{ps} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau} \end{aligned} \right\} \quad (3-83)$$

γ 是同 τ 有关的应变变量。

弱面上对应于相关联流动法则的张拉屈势函数 g^t 为：

$$g^s = \tau + \sigma'_{22} \tan \psi_j \quad (3-84)$$

式中， ψ_j 为剪胀角，在破坏的 AB 段的值为 ψ_{j2} ，在 BC 段的值为 ψ_{j1} 。

弱面上对应于相关联流动法则的张拉屈服势函数 g^t 为：

$$g^t = \sigma'_{22} \quad (3-85)$$

剪切破坏的局部塑性应变增量为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e'_{22}{}^{ps} &= \lambda^s \tan \psi_j \\ \Delta \gamma^{ps} &= \lambda^s \end{aligned} \right\} \quad (3-86)$$

对剪切破坏的应力修正为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma'_{11} &= -\lambda^s \alpha_2 \tan \psi_j \\ \Delta \sigma'_{22} &= -\lambda^s \alpha_1 \tan \psi_j \\ \Delta \sigma'_{33} &= -\lambda^s \alpha_2 \tan \psi_j \\ \Delta \tau &= -\kappa^s 2G \end{aligned} \right\} \quad (3-87)$$

其中：

$$\lambda^s = \frac{\tau^O + \sigma'_{22}{}^O \tan \phi_j - c_j}{2G + \alpha_1 \tan \psi_j \tan \phi_j} \quad (3-88)$$

上标 O 表示检查判断弱面上破坏前获得的值。

弱面上的局部剪切应力分量的塑性修正由下式得出：

$$\Delta\sigma_{12} = \Delta\tau \frac{\sigma'_{12}{}^O}{\tau^O} \quad (3-89)$$

张拉破坏的局部塑性应变增量为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e'_{22}{}^{pt} &= \lambda^t \\ \Delta \gamma^{pt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

对张拉破坏的应力修正为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma'_{11} &= -\lambda'\alpha_2 \\ \Delta\sigma'_{22} &= -\lambda'\alpha_1 \\ \Delta\sigma'_{33} &= -\lambda'\alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-91)$$

其中：

$$\lambda^t = \frac{\sigma'_{22}{}^O - \sigma'_j}{\alpha_1} \quad (3-92)$$

3. 硬化参数

在双线性应变硬化—软化的节理化模型中，塑性一旦发生，部分或全域岩土基质和节理的屈服性质参数（粘聚力、摩擦角、剪胀角和抗拉强度）的值将在一定范围内依照其与硬化参数的分段线性准则进行自动调整。对于每个软化参数，在 PROPERTY 命令中必须确定表格号（如果没有确定表格号，则认为参数为常量）。对应的表格中的数据包含成对的关于硬化/软化参数和性质参数的值，二者中间用了线性变化假设。当硬化参数的值大于其在表格中的最后一个值时，性质参数使用其在表格中的最后一个值。

这个模型中用到了 4 个独立的硬化变量：

- (1) κ^s ：用来计算岩土材料的塑性剪切应变，还可以用于更新其粘聚力、摩擦角和剪胀角。
- (2) κ^t ：用来计算岩土材料的塑性体积拉应变，以及更新其抗拉强度。
- (3) κ_j^s ：用来计算节理的塑性剪切应变，控制粘聚力、摩擦角和剪胀角的更新。
- (4) κ_j^t ：用来计算节理的塑性体积拉应变，控制节理抗拉强度的更新。

对计算域而言，参数都定义成塑性应变的增量和的形式。计算域的硬化增量由域内的所有三角形的硬化增量的平均值计算得出。

三角形的剪切硬化增量是塑性主应变偏量张量的第二不变量的平方根，对岩土材料：

$$\Delta\kappa^s = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\Delta e_1^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2 + (\Delta e_3^{ps} - \Delta e_m^{ps})^2} \quad (3-93)$$

其中 Δe_m^{ps} 是塑性剪切的体积应变增量， $\Delta e_m^{ps} = \frac{1}{3}(\Delta e_1^{ps} + \Delta e_3^{ps})$ 。

塑性应变增量由式 (3-74) 给出， λ^s 由式 (3-76) 给出。对于节理，方程式为：

$$\Delta\kappa_j^s = \sqrt{\frac{1}{3}(\Delta e'_{22}{}^{ps})^2 + (\Delta e'_{12}{}^{ps})^2} \quad (3-94)$$

其中塑性应变增量由式 (3-82) 给出， λ^s 由式 (3-84) 给出。

四面体的张拉硬化增量是塑性张拉体积应变增量，其相应于岩土材料基质的表达式为：

$$\Delta\kappa^t = \Delta e_3^{pt} \quad (3-95)$$

其中塑性应变增量由式(3-73)给出， λ' 由式(3-75)给出。

相应于节理的表达式为：

$$\Delta\kappa_j^t = \Delta e_{22}^{pt} \quad (3-96)$$

其中塑性应变增量由式(3-86)给出， λ' 由式(3-87)给出。

3.4 双屈服、剑桥和霍克布朗模型

3.4.1 双屈服模型

双屈服模型考虑了各向同性压力造成的永久体积变化，在FLAC的应变硬化—软化模型的剪切和张拉破坏包络线的基础上，又包括一个体积屈服面（又称“帽盖”）。为简单起见，帽盖面由“帽盖压力” $p_c > 0$ 来定义，它与剪切应力无关，由垂直于剪应力和平均应力之间关系曲线的直线组成。帽盖压力的硬化特性在塑性体积应变下是可用的，并且遵循由用户提供的表格所表述的分段线性规律。切向体积模量和剪切模量依照定义系数 R 的法则，以塑性体积应变的形式出现，这里假定 R 是表示弹性体积模量和塑性体积模量之比的常量。

除了下述与应变软化模型有关的材料参数外，只需要两个额外的材料参数和一张表格。

(1) p_c 的初始值，它对应于材料在过去所经受的最大平均压力。

(2) R 值，它控制体积卸载（在土力学术语中，称为“滞涨”）阶段应力—应变曲线的斜率，其值大于1。

(3) “硬化曲线”的表格表示法，它将帽盖压力 p_c 同塑性体积应变 e^{pv} 联系起来。

因此，任何实验室测定的硬化特性都可以利用双参数模型进行模拟。

1. 增量弹性法则

此模型在FLAC中的实现用到了主应力 σ_1 ， σ_2 ， σ_3 和平面外应力 σ_{zz} ，主应力和主方向由应力张量分量确定，并按顺序排列（压应力为负值），所以有：

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 \quad (3-97)$$

相应的主应变增量 Δe_1 、 Δe_2 、 Δe_3 可分解如下：

$$\Delta e_i = \Delta e_i^e + \Delta e_i^p \quad i=1, 3 \quad (3-98)$$

上标 e 和 p 分别指弹性和塑性部分，且塑性分量仅在塑性流动阶段不为零。假定塑性应变由剪切屈服和体积屈服产生，并由其相加，可得：

$$\Delta e_i^p = \Delta e_i^{ps} + \Delta s_i^{pt} + \Delta e_i^{pv} \quad (3-99)$$

上标 ps ， pt 和 pv 分别指弹性剪切应变、塑性拉应变和塑性体应变。根据约定，符号 Δe 与它的塑性部分 Δe^p 和弹性部分 Δe^e ，表示负的值应变增量（ $\Delta e_1 + \Delta e_2 + \Delta e_3$ ）。符号 Δe^{pv}

表示塑性体应变（ $\Delta e_1^{pv} + \Delta e_2^{pv} + \Delta e_3^{pv}$ ）的负值。

主应力和主应变形式的Hooke定律增量表达式为：

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= \alpha_1 \Delta e_1^e + \alpha_2 (\Delta e_2^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta\sigma_2 &= \alpha_1 \Delta e_2^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_3^e) \\ \Delta\sigma_3 &= \alpha_1 \Delta e_3^e + \alpha_2 (\Delta e_1^e + \Delta e_2^e) \end{aligned} \right\} \quad (3-100)$$

式中, $\alpha_1 = K_c + 4G_c/3$, $\alpha_2 = K_c - 2G_c/3$, K_c 和 G_c 分别为基于如下考虑的瞬时切向体积模量和瞬时切向剪切模量。

在等向压缩试验中, 随着压力 p_c 的增加, 材料变得更加密实, 其塑性刚度 (dp_c/de^{pv}) 通常会增加, 既然材料颗粒由于外力作用变得更加紧密, 似乎弹性刚度同时增加也是合理的。因此, 在一般加载条件下, 双屈服模型应用了一条简单的准则, 即增加的弹性刚度 K_c , 是由常量 R 乘以当前增加的塑性刚度。用户提供的体积模量 K 和剪切模量 G 的值, 认为是 K_c 和 G_c 的上限, 假定之比 K_c/G_c 为常量, 使用增量符号, 此准则定义为以下关系式:

$$\left. \begin{aligned} K_c &= \frac{\Delta p_c}{\Delta e^{pv}} K_c := \min(K_c, K) \\ G_c &= G \frac{K_c}{K} \end{aligned} \right\} \quad (3-101)$$

式中, 系数 R 已给定, $\Delta p_c / \Delta e^{pv}$ 是 p_c 当前值位置的曲线斜率。

2. 屈服函数和势函数

剪切屈服函数 f^s 和张拉屈服函数 f^t 分别为:

$$f^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \quad (3-102)$$

$$f^t = \sigma^t - \sigma_3 \quad (3-103)$$

式中, $N_\phi = (1 + \sin \phi)/(1 - \sin \phi)$; ϕ 为摩擦角; c 为粘聚力; σ^t 抗拉强度。

体积屈服函数 f^v 定义为:

$$f^v = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + p_c \quad (3-104)$$

式中, p_c 为帽盖压力。

剪切屈服势函数 g^s 对应于非相关联的流动法则, 张拉势函数 g^t 和体积势函数 g^v 对应于相关联的流动法则, 表达式为:

$$\left. \begin{aligned} g^s &= \sigma_1 - \sigma_3 N_\psi \\ g^t &= -\sigma_3 \\ g^v &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{aligned} \right\} \quad (3-105)$$

式中, $N_\psi = (1 + \sin \psi)(1 - \sin \psi)$, ψ 为剪胀角。

3. 硬化软化参数

依靠查找表格确定的硬化准则, 剪切和体积屈服面可以硬化或软化, 张拉屈服面可以软化。查找表中的条目标记了一些累积的塑性应变的硬化参数。在剪切和拉伸中, 硬化参数的增量形式为:

$$\Delta e^{ps} = \left\{ \frac{1}{2}(\Delta e_1^{ps} - \Delta e_m^{ps}) + \frac{1}{2}(\Delta e_m^{ps})^2 + \frac{1}{2}(\Delta e_3^{ps} - \Delta e_m^{ps}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-106)$$

其中 $\Delta e^{ps} = (\Delta e_1^{ps} + \Delta e_3^{ps})/3$, Δe_j^{ps} ($j=1, 3$) 和 Δe_3^{ps} 分别是主方向上的塑性剪切和拉伸应变增量。

4. 塑性修正

基于弹性假设, 由上标 I 表示原来的应力 σ_{ij}^O 加上由总应变增量计算所得弹性应力增量以后得到的应力估算, 在主轴方向有:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^I &= \sigma_1^O + \alpha_1 \Delta e_1 + \alpha_2 (\Delta e_2 + \Delta e_3) \\ \sigma_2^I &= \sigma_2^O + \alpha_1 \Delta e_2 + \alpha_2 (\Delta e_1 + \Delta e_3) \\ \sigma_3^I &= \sigma_3^O + \alpha_1 \Delta e_3 + \alpha_2 (\Delta e_1 + \Delta e_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-107)$$

在 FLAC 的数值实现过程中, 如果 $f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I) < 0$, 认为发生剪切破坏, 如果 $f^v(\sigma_1^I, \sigma_2^I, \sigma_3^I) < 0$, 认为发生体积屈服, 如果认为发生张拉屈服, 相应的塑性修正分别由下列方法计算:

首先考虑没有发现张拉破坏但是剪切和体积屈服状态都超出的情况, 由式 (3-97) 和式 (3-98) 总应变增量可以表示为:

$$\Delta e_i = \Delta e_i^e + \Delta e_i^{ps} + \Delta e_i^{pv} \quad (i=1, 3) \quad (3-108)$$

剪切和体积屈服的流动法则为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_i^{ps} &= \lambda^s \frac{\partial g^s}{\partial \sigma_i} \\ \Delta e_i^{pv} &= \lambda^v \frac{\partial g^v}{\partial \sigma_i} \end{aligned} \right\} \quad (3-109)$$

其中 $i=1, 3$, 经求导后, 这些表达式变成:

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^{ps} &= \lambda^s \\ \Delta e_2^{ps} &= 0 \\ \Delta e_3^{ps} &= -\lambda^s N_\psi \end{aligned} \right\} \quad (3-110)$$

及

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^{pv} &= \frac{1}{3} \lambda^v \\ \Delta e_2^{pv} &= \frac{1}{3} \lambda^v \\ \Delta e_3^{pv} &= \frac{1}{3} \lambda^v \end{aligned} \right\} \quad (3-111)$$

得到:

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^e &= \Delta e_1 - \lambda^s - \lambda^v / 3 \\ \Delta e_2^e &= \Delta e_2 - \lambda^v / 3 \\ \Delta e_3^e &= \Delta e_3 + \lambda^s N_\psi - \lambda^v / 3 \end{aligned} \right\} \quad (3-112)$$

有了这些弹性应变增量的表达式，可以得到 Hooke 增量表达式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s (\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) - \lambda^v K \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I - \alpha_2 \lambda^s (1 - N_\psi) - \lambda^v K \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s (\alpha_2 - \alpha_1 N_\psi) - \lambda^v K \end{aligned} \right\} \quad (3-113)$$

式中： σ_i^I ($i=1, 3$) 为初始试验应力， $\sigma_i^N = \sigma_i^O + \Delta \sigma_i$ ($i=1, 3$) 是当前时步新的主应力。

为了确定系数 λ^s 和 λ^v ，做出如下假定：如果剪切和体积屈服同时发生，两个屈服面上都产生新的应力，此时 $f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I) = 0$ 和 $f^v(\sigma_1^I, \sigma_2^I, \sigma_3^I) = 0$ 。可以得到 λ^s ：

$$\lambda^s = \frac{f^{sI} - f^{vI}(1 - N_\phi)}{\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi - \alpha_2 N_\phi + \alpha_1 N_\psi N_\phi - K(1 - N_\phi)(1 - N_\psi)} \quad (3-114)$$

因此：

$$\lambda^v = \frac{f^{vI}}{K} - \lambda^s (1 - N_\psi) \quad (3-115)$$

如果单元仅仅发生剪切屈服， $\lambda^v = 0$ ，则：

$$\lambda^s = \frac{f^{sI}}{\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi - \alpha_2 N_\phi + \alpha_1 N_\psi N_\phi} \quad (3-116)$$

如果单元仅仅发生体积屈服， $\lambda^s = 0$ ，则：

$$\lambda^v = \frac{f^{vI}}{K} \quad (3-117)$$

现在考虑由 $f^t(\sigma_3^I) < 0$ 确定的张拉破坏的情况，如果体积破坏没有出现，可采用摩尔—库仑模型中描述过的相同方法和应力修正。如果除张拉破坏外还发生了体积破坏，则 $f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I) \leq 0$ 或 $f^s(\sigma_1^I, \sigma_3^I) > 0$ 。假设三种屈服状态同时出现，则假设认为剪切屈服、体积屈服和张拉屈服的塑性部分相加，即：

$$\Delta e_i = \Delta e_i^e + \Delta e_i^{ps} + \Delta e_i^{pv} + \Delta e_i^{pt} \quad (i=1, 3) \quad (3-118)$$

张拉屈服的流动法则如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1^{pt} &= 0 \\ \Delta e_2^{pt} &= 0 \\ \Delta e_3^{pt} &= -\lambda^t \end{aligned} \right\} \quad (3-119)$$

用上面同样的推理，可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1^I - \lambda^s (\alpha_1 - \alpha_2 N_\psi) - \lambda^v K + \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^I - \alpha_2 \lambda^s (1 - N_\psi) - \lambda^v K + \lambda^t \alpha_2 \\ \sigma_3^N &= \sigma_3^I - \lambda^s (\alpha_2 - \alpha_1 N_\psi) - \lambda^v K + \lambda^t \alpha_1 \end{aligned} \right\} \quad (3-120)$$

系数 λ^s , λ^v 和 λ^t 通过解三个等式 $f^s(\sigma_1^N, \sigma_3^N) < 0$ 、 $f^v(\sigma_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N) = 0$ 和 $f^t(\sigma_3^N) = 0$ 来确定, 这里给出如下:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^s &= \frac{f^{II}(1+2N_\psi) + 3f^{VI} - 2f^{SI}}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ \lambda^v &= \frac{f^{VI}}{K} + \frac{-3(1+2N_\phi)f^{II} - 6f^{VI} + 3f^{SI}}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ \lambda^t &= \frac{-f^{II}[N_\psi(1+2N_\phi) + 2 + N_\phi] - 3(1+N_\psi)f^{VI} + (1+2N_\psi)f^{SI}}{\alpha_2 - \alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (3-121)$$

代入式 (3-120), 屈服为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma^t N_\phi 2c\sqrt{N_\phi} \\ \sigma_2^N &= -3P_c - \sigma^t(1+N_\phi) + 2c\sqrt{N_\phi} \\ \sigma_3^N &= \sigma^t \end{aligned} \right\} \quad (3-122)$$

如果仅发生张拉和体积屈服, 则在式 (3-120) 中 $\lambda^s = 0$ 。

常量 λ^v 和 λ^t 由条件 $f^v(\sigma_1^N, \sigma_2^N, \sigma_3^N) = 0$ 和 $f^t(\sigma_3^N) = 0$ 确定。经过处理, 可得到:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^v &= \frac{\alpha_1 f^{VI} + K f^{II}}{K(\alpha_1 - K)} \\ \lambda^t &= \frac{f^{VI} + f^{II}}{\alpha_1 - K} \end{aligned} \right\} \quad (3-123)$$

代入式 (3-120), 得:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^N &= \sigma_1^t - \frac{3f^{VI} + f^{II}}{2} \\ \sigma_2^N &= \sigma_2^t - \frac{3f^{VI} + f^{II}}{2} \\ \sigma_3^N &= \sigma^t \end{aligned} \right\} \quad (3-124)$$

3.4.2 修正的剑桥粘土模型

修正的剑桥粘土模型是增量硬化—软化弹塑性模型, 其参数包括一个特殊的非线性弹性部分和一个由体积塑性应变 (“密度” 确定) 确定的硬化—软化特性。破坏包络线在形状上是相似的, 并且同绕主应力空间的平均应力轴转动的椭圆体对应。在这个模型中, 同剪切采用了流动法则相关联法则, 没有提供相应于张拉平均应力的阻力。见 Roscoe and Burland(1968) and Wood(1990)对于修正的剑桥模型的详细描述, 为方便起见, 后文省略掉限定词 “修正”; 注意所有的模型都可以有效应力的形式表达。特别地, 本节提到的所有压力均为有效应力。

1. 屈服函数

相应于特定的固结压力值的屈服函数的形式为:

$$f = q^2 + Mp(p - p_c) \quad (3-125)$$

这里 M 是材料常数。屈服状态 $f = 0$ 由平面内以 p_c 为横轴，以 M_{p_c} 为纵轴的椭圆表示。注意椭圆过原点，因此，此模型的材料并不支持四周受拉应力的情况。破坏准则由主应力空间内绕平均应力轴转动的椭圆表示。势函数对应于相关联的流动法则，由此可得：

$$g = q^2 + M^2 p(p - p_c) \quad (3-126)$$

2. 硬化—软化准则

屈服函数的形状取决于固结压力 p_c 的值，此压力是塑性体积变化的函数，且随比容而变化。

对应于新的值 v 和 p 固结压力 p_c 可以通过 $(v, \ln p)$ 平面内固结线和膨胀线的交点得出，这里给出其表达式：

$$p_c = p_1 e^{(v_\lambda - v_\kappa)(\lambda - \kappa)} \quad (3-127)$$

其中：

$$v_\kappa = v + \kappa \ln \frac{p}{p_1} \quad (3-128)$$

3. 初始应力状态

FLAC 中的剑桥粘土模型仅可用于平均有效应力为压应力的材料。特别地，材料的初始状态（只是在应用剑桥粘土模型之前）必须同此要求相协调。初始状态可以通过 INITIAL 指定，或者是其他一应用的本构模型运行结果。任何情况下，初始有效压力 p_0 在整个介质中必须为正值。

4. 确定输入参数

超固结比 R ——先期固结压力和初始固结压力之比，即：

$$R = \frac{p_{c0}}{p_0} \quad (3-129)$$

超固结比在描述剑桥粘土材料的行为时很有用。

摩擦常数 M ——在临界状态线上 q/p_{cr} 的比值，所以可以用一系列三轴试验（排水或不排水，并量测孔隙水压力）来确定此常数。这些试验应在大应变条件下进行，确保最终的 p_{cr} 和 q 值接近临界状态， $q - p_{cr}$ （通过回归分析所得）最好吻合线的斜率，即为参数 M 。 M 同摩尔—库仑屈服函数的有效应力摩擦角 ϕ' 有关。然而，因为剑桥粘土临界状态线与中主应力 σ_2 相关，而摩尔—库仑模型与中主应力 σ_2 不相关，在屈服时对不同的 σ_2 值， M 和 ϕ' 的关系也不同（这种状态相似于摩尔—库仑和德鲁克—普拉格屈服函数间的关系）。对于三轴压缩试验：

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \quad (3-130)$$

对于三轴拉伸试验，则：

$$M = \frac{6 \sin \phi'}{3 + \sin \phi'} \quad (3-131)$$

正常固结和膨胀曲线（ λ 和 κ ）的斜率——理想状态下这两个参数应由带几个卸载偏移的各向同性加载三轴（ $q = 0$ ）试验确定。图上正常压缩曲线的斜率即为参数 λ ，同一图上的卸载偏移曲线的斜率即为参数 κ 。

这两个参数也可以从固结实验的确定假定获得，让 σ_V 和 σ_H 为一个固结试验的垂直和水

平应力。在大多数固结仪器中,是不可能测量水平应力 σ_H 的,所以平均应力 $p = (\sigma_V + 2\sigma_H)/3$ 是未知的。但是,实验数据表明,正常固结条件下水平和垂直有效应力的比值为一个常数。既然 $p = \sigma_V(1 + 2K_0)/3$ 沿正常压缩曲线, $v - \ln p$ 曲线的斜率等于 $e - \ln \sigma_v$ 的斜率,这里 $e = v - 1$ 是孔隙比。

压缩指数 C_c 由曲线 $v - \log_{10}(\sigma_v)$ 的斜率计算而得,所以参数 λ 为:

$$\lambda = C_c / \ln(10) \quad (3-132)$$

实验数据表明,在固结实验中,沿着膨胀线,不是常数,所以基于膨胀系数的一个估计值,仅仅是一个近似值。

$$\kappa \approx C_s / \ln(10)$$

在 $v - \ln p$ 图上定出正常固结线——为了在 $v - \ln p$ 图上定出正常固结线,必须确定此曲线上的点 $(v_\lambda, \ln p_1)$ 。确定这点的办法是各向同性的三轴试验,或基于不排水剪切强度(BrittoGunn, 1987)确定该点。

正常固结线的表达式为:

$$\gamma = v_\lambda - \lambda \ln \frac{p}{p_1} \quad (3-133)$$

在 $p = p_1$ 的临界状态线上的比容,由下式给出:

$$\Gamma = v_\lambda - (\lambda - \kappa) \times \ln(2) \quad (3-134)$$

在土体中,不排水剪切强度 C_u 通过下式与比容 v_{cr} 唯一相关:

$$C_u = \frac{Mp_1}{2} \exp\left(\frac{\Gamma - v_{cr}}{\lambda}\right) \quad (3-135)$$

因此,对于一个给定 p_1 ,如果对于一个比容 v_{cr} 的不排水剪切强度,连同参数 M , λ 和 κ 都已知, Γ 的值以及 v_{cr} 可以计算出来。

先期固结压力 p_{c0} ——先期固结压力确定屈服面的初始大小,表达式:

$$q^2 = M^2 [p(p_{c0} - p)] \quad (3-136)$$

如果试样服从等向加压路径, p_{c0} 的值达到最大,超过平均有效应力。如果试样服从其他的非等向路径, p_{c0} 由式(3-136)用 p 和 q 的先期最大值计算。

最大竖向有效应力可以应用卡萨兰德的方法(BrittoGunn, 1987)由固结仪试验计算得到。最大水平有效应力必须由一些假设得出,通常的假设是Jaky关系:

$$K_{nc} = \frac{\sigma_{h\max}}{\sigma_{v\max}} \approx 1 - \sin \phi' \quad (3-137)$$

式中, K_{nc} 为正常固结土的静止最大水平应力与最大竖向应力之比。

如某一土体,有效摩擦角为 20° ,已经经受了最大竖向有效应力,然后应用Jaky关系式:

$$K_{nc} = 1 - \sin 20^\circ = 0.658 \quad (3-138)$$

最大水平应力为 $\sigma_{\max} = 0.658 \text{MPa}$ 。 (3-139)

p 和 q 的最大值为:

$$p_{\max} = \frac{\sigma_{V\max} + 2\sigma_{H\max}}{3} = 0.772 \text{MPa} \quad (3-140)$$

将这两个值代入屈服关系式,可得到初始固结压力:

$$p_{c0} = p_{\max} + \frac{q_{\max}^2}{M^2 p_{\max}} = 0.961 \text{MPa} \quad (3-141)$$

初始比容值和瞬时体积模量——假定初始压力 p_0 ，初始比容 v_0 一定与参数 κ ， λ ， p ， p_{c0} 的选择相一致。初始比容 v_0 由膨胀曲线和正常固结线相交的 $p = p_{c0}$ 之点所对应 p_0 的比容的值计算得出，表达式为：

$$v_0 = v_\lambda - \lambda \ln \left(\frac{p_{c0}}{p_1} \right) + \kappa \ln \left(\frac{p_{c0}}{p_1} \right) \quad (3-142)$$

体积模量的初始值 (`bulk_current`) 可用下式算出：

$$K = \frac{v_0 p_0}{\kappa} \quad (3-143)$$

在 FLAC 中， v_0 和 K 的默认值在命令执行的第一步由式 (3-142) 和式 (3-143) 计算得出。

弹性参数和大最大值——在剑桥粘土模型中，当前体积变量 (`bulk_current`) 的值是作为比容和平均应力的函数变化：

在 FLAC 中， $K_{\max}(\text{bulk})$ 和 $G(\text{shear})$ 的输入值用于进行质量缩放计算 (`mass scaling calculation`)，以保证数值计算的稳定性。一旦执行 STEP 命令，这种计算就开始进行。像两次连续的 STEP 命令所计算出的值一样，选择输入的数值须能给出 $(K + 4/3G)$ 总和上限。然而，这些值不应设置得太大，否则模型将收敛得较慢，这些值的选取应该基于问题的应力水平。

G 或者 ν ——FLAC 中的修正剑桥模型允许用户指定一个常剪切模量或一个恒定的泊松比。如果没有指定泊松比，则假定常剪切模量等于输入值。然后，泊松比作为比容和平均应力的函数而变化：

$$\nu = \frac{3 \frac{\nu p}{\kappa} - 2G}{6 \left(\frac{\nu p}{\kappa} \right) + 2G} \quad (3-144)$$

如果指定了一个非零的泊松比，剪切模量将随体积模量同比变化，以使泊松比保持常数：

$$G = \frac{3 \left(\frac{\nu p}{\kappa} \right) (1 - 2\nu)}{2(1 - 2\nu)} \quad (3-145)$$

3.4.3 霍克—布朗模型

霍克—布朗模型准则是一个描述完整岩块或岩体引起破坏的经验关系。它在那些使用基线平衡法的设计方法中得到了十分成功的应用，但是还没有直接用于数值解法中。在特定应力水平上，选择了与摩尔—库仑模型中应用的等效的摩擦角和粘聚力，与非线性的霍克—布朗模型强度包线相匹配的。数值解法需要完整的本构模型，它将应力和应变以一种全面的方式联系起来，此外，还需要一种破坏（屈服）准则，一种“流动法则”以确定破坏时应变速率分量之间的联系。已经有几种试图从霍克—布朗准则推出一个完整的本构模型的尝试，比如 Pan and Hudson(1988)、carter et al.(1993)以及 Shah(1992)。这些方程假定流动法则和破坏准则之间具有某种固定的关系，并且流动法则是各向同性的，但是霍克—布朗准则却不是各向同性的。这里

描述的方程中，流动法则没有固定的形式，假定它取决于应力水平和可能的破坏方式。

应用塑性理论的术语，将破坏准则作为屈服面。通常，假定破坏准则是固定的，限定与材料的最终破坏一致的应力状态。然而，弹塑性问题的数值模拟允许“破坏”发生后继续求解，且破坏状态本身可能随着模拟的进展而变化。在这种情况下，无论是延性还是脆性性质都可以表示，这取决于所使用的软化关系。

1. 基本方程

广义的霍克—布朗准则 (Hoek-Brown, 1980, 1998)，采用压应力为正的约定，为：

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{ci} \left\{ m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{ci}} + s \right\}^{\alpha} \quad (3-146)$$

式中， σ_1 和 σ_3 分别为最大和最小主应力；

σ_{ci} ， m_b 和 α 是同地质强度指数及岩石破坏相关的材料常数。

无侧限压缩强度由 $\sigma_c = \sigma_{ci} s^{\alpha}$ 给出，抗拉强度由 $\sigma_t = -s \sigma_{ci} / m_b$ 给出。注意准则式中与主应力 σ_2 无关。因此，破坏包线不是各向同性的。

假定当前的主应力为 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ，初始试验应力 $(\sigma_1^t, \sigma_2^t, \sigma_3^t)$ 通过增量弹性理论计算：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^t &= \sigma_1 + E_1 \Delta e_1 + E_2 (\Delta e_2 + \Delta e_3) \\ \sigma_2^t &= \sigma_2 + E_1 \Delta e_2 + E_2 (\Delta e_1 + \Delta e_3) \\ \sigma_3^t &= \sigma_3 + E_1 \Delta e_3 + E_2 (\Delta e_1 + \Delta e_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-147)$$

式中， $E_1 = K + 4G/3$ ， $E_2 = K - 2G/3$ ，且 $(\Delta e_1, \Delta e_2, \Delta e_3)$ 是一组主应变增量。如果屈服准则在这组应力下破坏，则假定应变增量由弹性和塑性两部分组成：

$$\left. \begin{aligned} \Delta e_1 &= \Delta e_1^e + \Delta e_1^p \\ \Delta e_2 &= \Delta e_2^e \\ \Delta e_3 &= \Delta e_3^e + \Delta e_3^p \end{aligned} \right\} \quad (3-148)$$

注意中间主应力方向并不发生塑性流动。模型输出的最终应力 $(\sigma_1^f, \sigma_2^f, \sigma_3^f)$ 是同应变增量的弹性分量相关的。因此有：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^f - \sigma_1 &= E_1 (\Delta e_1 - \Delta e_1^p) + E_2 (\Delta e_2 + \Delta e_3 - \Delta e_3^p) \\ \sigma_2^f - \sigma_2 &= E_1 \Delta e_2 + E_2 (\Delta e_1 - \Delta e_1^p + \Delta e_3 - \Delta e_3^p) \\ \sigma_3^f - \sigma_3 &= E_1 (\Delta e_3 - \Delta e_3^p) + E_2 (\Delta e_1 - \Delta e_1^p + \Delta e_2) \end{aligned} \right\} \quad (3-149)$$

消除当前应力后有：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^f &= \sigma_1^t - E_1 \Delta e_1^p - E_2 \Delta e_3^p \\ \sigma_2^f &= \sigma_2^t - E_2 (\Delta e_1^p + \Delta e_3^p) \\ \sigma_3^f &= \sigma_3^t - E_1 \Delta e_3^p - E_2 \Delta e_1^p \end{aligned} \right\} \quad (3-150)$$

假定遵循如下法则：

$$\Delta e_1^p = \gamma \Delta e_3^p \quad (3-151)$$

式中系数 γ 取决于应力且在每一时步被重新计算。从式 (3-150) 消去 Δe_1^p :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^f &= \sigma_1^t - \Delta e_3^p (\gamma E_1 + E_2) \\ \sigma_2^f &= \sigma_2^t - \Delta e_3^p E_2 (1 + \gamma) \\ \sigma_3^f &= \sigma_3^t - \Delta e_3^p (\gamma E_2 + E_1) \end{aligned} \right\} \quad (3-152)$$

在屈服阶段, 由最终应力满足, 即:

$$F = \sigma_1^f - \sigma_3^f - \sigma_{ci} \left\{ m_b \frac{\sigma_3^f}{\sigma_{ci}} + s \right\}^a = 0 \quad (3-153)$$

将式 (3-152) 中的和代入式 (3-153), 可以迭代求出, 然后将 Δe_3^p 回代入式 (3-152) 解得最后的各个应力。

2. 流动法则

需要考虑一个合适的流动法则, 它能描述屈服阶段材料的体积特性。通常, 流动参数将取决于应力, 且可能取决于应力历史。在围压很低或拉应力状态下, 因为代表性的破坏模式是轴向劈裂而不是剪切, 所以提材料的“剪胀角”是没有意义的。体积应变是以一种复杂的方式与应力水平相关, 下面考虑几种情况。

3. 相关联的流动法则

许多延时无侧限压缩条件下屈服时表现出很大速率的轴向劈裂及形破坏有关的体积膨胀。相关联流动法则提供理论上可以证明的最大体积应变率。此流动法则有望应用于单轴应力状态的附近区域。相关联流动法则, 其塑性应变率的张量与屈服面正交。因此有:

$$\Delta e_1^p = -\gamma \frac{\partial F}{\partial \sigma_1} \quad (3-154)$$

式中下标表示主应力方向上的分量, 由式 (3-153) 定义, 对该表达式求导数, 并用式 (3-152), 有:

$$\gamma_{af} = -\frac{1}{1 + a \sigma_{ci} (m_b \sigma_3 / \sigma_{ci} + s)^{a-1} (m_b / \sigma_{ci})} \quad (3-155)$$

4. 径向流动法则

在单轴拉伸条件下, 我们也许期望材料将在拉伸应力方向上发生屈服。如果施加的拉应力是各向同性的, 假定材料将各向同性变形。这两种状态通过径向流动法则实现, 假定所有主应力都是拉应力时使用径向流动法则。对于一个同主应力张量分量共轴的流动速率张量, 流动法则为:

$$\gamma_{rf} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (3-156)$$

5. 恒定流动法则

当侧限应力增加时, 一点达到在屈服阶段材料不再膨胀的状态。因此, 当侧限应力超过用户指定的水平后, 使用恒定体积流动法则式适宜的。此流动法则为:

$$\gamma_{cv} = -1 \quad (3-157)$$

6. 复合流动法则

建议根据应力状态使用流动法则。在完全张拉区域，将使用径向流动法则。对于压缩应力和拉应力为零的情形，使用相关联的流动法则。对 $0 < \sigma_3 < \sigma_3^{cv}$ ， γ 的值在相关联法则和恒定体积法则范围内线性内插得出：

$$\gamma = \frac{1}{\gamma_{af} + \left(\frac{1}{\gamma_{cv}} - \frac{1}{\gamma_{af}} \right) \frac{\sigma_3}{\sigma_3^{cv}}} \quad (3-158)$$

最后，当 $\sigma_3 > \sigma_3^{cv}$ 时使用体积恒定的值 $\gamma = \gamma_{cv}$ 。

值得注意的是，如果 σ_3^{cv} 设置为零，则模型状态接近零剪胀角非关联流动法则。如果 σ_3^{cv} 设置为一个相对 σ_{ci} 大得多的值，模型状态接近于相关联流动状态。

3.5 梁、衬砌、锚索和桩单元

3.5.1 梁单元

1. 公式推导

FLAC 中的梁 Beam 具有两个端点的标准的二维梁单元，每个端点具有三个自由度（两个位移，一个转动）。定义梁单元包括它的材料和几何特性两个方面，而且假定材料和几何特性在每个单元没有变化。一般地，梁被假定为轴向拉压破坏极限的线弹性材料。如果需要还可以指定最大弯矩（塑性矩）。梁单元具有对称的截面，面积为 A ，长度为 L ，还有界面惯性矩 I ，这些都是基于 a 、 b 端点定义的。梁在二维空间的方向如下：

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \frac{\Delta x}{z} \cos \theta, \quad z = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{\frac{1}{2}} \\ t_2 &= \frac{\Delta y}{z} = \sin \theta \\ n_1 &= -t_2 = -\sin \theta \\ n_2 &= t_1 = \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-159)$$

每个节点的方向量都可分解为切向和法向分量：

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^t + F_i^n \\ &= (F_j t_j) t_i + (F_j n_j) n_i \\ &= F_t t_i + F_n n_i \end{aligned} \quad (3-160)$$

这里：

$$F_j t_j = |F_i^t| = F^t \quad F_j n_j = |F_i^n| = F^n$$

因此：

传递到网格点并随着所附网格点移动。弯矩在梁内附着点向网格传播（假定这些梁单元节点在粘附点处不是铰接）。但是，附着在网格点上的梁单元节点在梁网连接处都是铰接的，并不能将结构弯矩传递给网格点。

2. 梁单元的参数

在 FLAC 中使用的梁单元需要输入以下参数：

- (1) 横截面积；
- (2) 弹性模量；
- (3) 截面的二次矩（也就是通常所说的惯性矩）；
- (4) 塑性矩（可选的，除非特别说明，假设力矩承载能力是足够大的）；
- (5) 密度（可选的，用于动力学分析和考虑重力荷载）；
- (6) 热膨胀系数（可选的，用于热力学分析）；
- (7) 轴向抗拉强度峰值；
- (8) 轴向抗拉强度残值；
- (9) 轴向抗拉强度；
- (10) 列间距。

对于梁单元来说，可以给出矩形单元横截面的高度和宽度（或者是圆形截面的半径），而不是直接给出面积和惯性矩，面积和惯性矩可以根据它们自动计算出来。

梁单元的参数可以通过简单计算或者查询手册得到。比如，典型的结构钢筋的杨氏模量为 200GPa，泊松比为 0.3。对于混凝土来说，典型的杨氏模型的值只在 25~35GPa 之间，泊松比在 0.15~0.2 之间，质量密度在 2100~2400kg/m³ 之间。对于复合材料，如钢筋混凝土，应该根据变换式给出。需注意的是，梁单元的公式是一个平面应力公式。如果梁单元是表示在垂直于所分析的平面的方向上是一个连续的结构（如混凝土的隧道衬砌），那么对于杨氏模量的数值 E 应该除以 $1-\nu^2$ ，以适用于平面应变问题。

3.5.2 衬砌单元

1. 力学特性

FLAC 和 FLAC3D 提供了二维和三维衬砌结构单元。衬砌结构单元 LinerSEL 的力学特性可以分为衬砌材料本身对结构的响应和衬砌与 FLAC3D 网格的相互作用。衬砌是可抵抗表面荷载和弯曲荷载的壳体单元。实际的衬砌可视为粘结在网格表面上多个衬砌单元的集合，LinerSEL 除提供壳体结构的力学特性之外，还考虑了衬砌剪切方向（衬砌结构表面的切平面）的摩擦力与 FLAC3D 网格间的相互作用，并可施加法向压力和拉力，衬砌结构可在围岩网格中自由破坏。LinerSEL 衬砌用来模拟法线方向上的拉伸或压缩作用，及衬砌与围岩介质在剪切方向的摩擦力作用等，如喷射混凝土衬砌的隧道和挡土墙。

衬砌是被粘附在 FLAC3D 的网格表面之上的，应力包括法向应力和剪切应力，与衬砌自身的应力平衡。衬砌—围岩界面的力学行为在每个节点由具有一定拉伸强度的法向弹簧和切向滑块—弹簧模拟。弹簧滑移方向的改变与衬砌—围岩间的剪切位移 u_s 相关。

衬砌单元界面的法向效应与法向连接弹簧参数①单位面积上的刚度 k_n 和②拉伸强度 f_t 相关。衬砌围岩界面的剪切强度本质上是由粘聚力和摩擦力决定的，是由剪切连接弹

簧参数①单元面积刚度 k_s ，②粘聚力 c ，③残余粘结力 c_r ，④摩擦角 ϕ 以及界面的法向应力 σ_n 确定的。如果衬砌是由拉应力破坏，那么有效粘聚力从 c 降低到 c_r ，而且拉伸强度变成零。

在计算衬砌—围岩界面的相对位移时，基于节点连接处计算区域的位移场，采用插值法计算网格的位移。插值法是通过到单元网格点的距离取加权系数实现的，采用同样的插值方法将衬砌围岩界面上产生的力反算到网格点。在计算网格采用大应变模式时，衬砌可以通过插值点位置在网格内移动来模拟大应变滑移。这就允许用户通过衬砌节点和围岩之间的滑移进行大应变计算和衬砌破坏后的行为。在每个衬砌节点和区域表面的连接将被删除，但是，如果节点后来又恢复了与围岩表面的接触，那么连接将重新建立。

2. 衬砌响应的监控

衬砌响应包括对衬砌自身的应力和在法向和切向连接弹簧的应力、位移、屈服状态和载荷的方向。衬砌的响应可通过 FISH 语言来实现：

- (1) 用 PRINT sel liner 命令打印，这里类型 $type = \{coupling \text{ 和 } nforce\}$ ；
- (2) 用 HISTORY sel linersel 命令监控；
- (3) 用 PLOT sel liner 命令绘图。

3. 衬砌单元的参数

每个衬砌单元有下列 12 个特性参数：

- (1) Density: 质量密度 ρ (可选项，动力学模型或者考虑重力时) $[M/L^3]$ 。
- (2a) isotropic: 各向同性材料参数杨氏模量 $[F/L^2]E$ 和泊松比 ν 。
- (2b) orthotropic: 正交各向异性参数 \bar{e}_{11} , \bar{e}_{12} , \bar{e}_{22} , \bar{e}_{33} 。
- (3) thexp: 热膨胀系数 $\alpha_t [1/T]$ 。
- (4) thickness: 厚度 $t [L]$ 。
- (5) cs-nuct: 法向连接弹簧的拉伸强度(应力单位) $f_t [F/L^2]$ 。
- (6) cs_nk: 法向连接弹簧的单位面积上的刚度 $k_n [F/L^2]$ 。
- (7) cs_scoh: 切向连接弹簧的粘聚力: 应力单位 $c [F/L^2]$ 。
- (8) cs_sfric: 切向连接弹簧的残余应力 $c_r [F/L^2]$ 。
- (9) cs_sfric: 切向连接弹簧的摩擦角 $\phi [度]$ 。
- (10) cs_sk: 切向连接弹簧每单位面积的刚度 $k_s [F/L^3]$ 。
- (11) slide: 大应变滑移标记，默认为关。
- (12) slide_tol: 允许的大应变滑移值。

材料的组成特性可能是各向同性的，也可能是正交各向异性的，因此必须分别指出。衬砌和网格接触面的法向和剪切效应由六个连续弹簧的特性参数控制，它们可分为强度 (f_t, c, c_r, ϕ) 和刚度 (k_n, k_s) 两种参数，选择适当的强度参数是比较容易的，而选择适当的刚度参数相对更复杂一些。

通常，希望衬砌接触面区域的刚度比周围材料大，但是在预期荷载作用下则可能发生滑移或张开。在这种情况下，需要为衬砌单元提供一种滑移或者是接触面域内张开的模式。虽然强度参数很重要，但弹性刚度却不怎么重要。推荐使用与最小接触面变形相一致的最低刚度，

一个不错的经验方法就是设置 k_n 和 k_s ，值为邻域刚度的计算。在衬砌表面法向上计算单元的表现刚度（在单位长度的应力）为：

$$\max \left[\frac{\left(K + \frac{4}{3}G \right)}{\Delta Z_{\min}} \right] \quad (3-166)$$

式中， K 和 G 分别为体积模量和剪切模量； ΔZ_{\min} 为在法线方向上邻近单元的最小尺寸。

这里 $\max[]$ 符号表示在邻近衬砌中的所有区域所取的最大值。注意式 (3-166) 仅仅适用于接触面为平面的情形，如果接触面是曲面的，比如在一个圆形开挖的情况下，那么表现刚度应该由 10 增加到 100 倍。对具体问题建议作验证，界面变形应比相应单元的变形要小。连接弹簧的位移可通过 `PRINT sel liner coupling disp` 命令得到，而单元变形可通过 `PRINT gp disp` 命令得到。

3.5.3 锚索单元

1. 锚索单元的参数

在 FLAC 中锚索单元需要输入如下参数：

- (1) 锚索的横截面积；
- (2) 锚索的密度（可选的，用于动力学分析和考虑重力荷载）；
- (3) 锚索的弹性模量；
- (4) 锚索的拉伸屈服（力）强度；
- (5) 锚索的压缩屈服（力）强度；
- (6) 锚索的外周长；
- (7) 水泥浆的刚度（力/锚索长度/位移）；
- (8) 水泥浆的粘聚力；
- (9) 水泥浆的摩擦阻力；
- (10) 热膨胀系数（可选的，用于热分析中）；
- (11) 列间距。

也可以列出锚索的半径，而不是面积，这样可以通过计算自动得到锚索的横截面积。如果要考虑水泥浆的摩擦阻力，那么必须单独给出锚索的周长。

相比于锚索的截面积、弹性模量和屈服点等参数，获得有关水泥浆的参数比较困难，假设水泥浆环孔材料为理想的弹塑性体，由此得到在钢筋表面到钻孔表面的相对剪切变形 u^t 和剪切力 F^t ，单元长度锚索的 F^t 和水泥浆刚度 K_{bond} 之间的关系是：

$$F^t = K_{bond} u^t \quad (3-167)$$

通常情况下， K_{bond} 都可以在实验室通过拉拔试验测得，刚度也可采用计算得到，可由水泥浆和岩石界面处的剪应力方程来定义剪切应力 τ_G (St.John, Van Dillen, 1983)：

$$\tau_G = \frac{G}{D/2+t} \cdot \frac{\Delta u}{\ln(1+2t/D)} \quad (3-168)$$

式中， Δu 为单元和围岩材料间的相对位移； G 为水泥浆的剪切模量； D 为钢筋（索）的

直径; t 为环带的厚度。

因此, 水泥浆的剪切刚度 K_{bond} 由下式确定:

$$K_{bond} = \frac{2\pi G}{\ln(1+2t/D)} \quad (3-169)$$

多数情况下, 可以用下面这个式子合理地估算用于 FLAC 计算的 K_{bond} 的大小:

$$K_{bond} \approx \frac{2\pi G}{10\ln(1+2t/D)} \quad (3-170)$$

这个 $\frac{1}{10}$ 的系数考虑了发生在寄宿域网格点和钻孔表面之间产生的相对剪切位移的影响, 相对剪切位移在目前的理论公式中未予以考虑, 在缺乏实验数据的情形下, 可参考下文 FLAC 的算例来确定有关参数。

单位锚索长度中水泥浆的最大剪切力值可由式 (3-174) 确定, 粘结强度和摩擦角的数值都可以从不同围压条件下的拉伸试验的结果中得到, 否则, 可以根据最大剪切强度的峰值进行估计 (St.John, Van Dillen, 1983):

$$\tau_{peak} = \tau_1 Q_B \quad (3-171)$$

这里 τ_1 约为软弱岩石或者是水泥浆单轴抗压强度的一半, Q_B 代表水泥浆和岩石的粘结程度参数, $Q_B = 1$ 代表完全粘结。

忽略摩擦力的影响, S_{bond} 可从下式得到:

$$3. \quad S_{bond} = \pi(D+2t)\tau_{peak}$$

锚固系统的破坏并不总是发生在水泥浆和岩石的交界面上, 破坏还很可能发生在钢筋 (锚索) 加固体和水泥浆的交界面上, 这种破坏方式对于锚索加固来说也是时有发生。在这种条件下, 应该计算在这个界面上的剪切力, 这意味着上式中 $(D+2t)$ 应该由 D 来取代。

下面的例子讨论了锚索单元参数的计算, 直径为 25.4mm (1 英寸), 长度为 2.5m 的锚索垂直打入, 锚固系统的特征参数如下所示:

锚索的直径 (D)	25.4mm
钻孔的直径 ($D+2t$)	38mm
锚索的模量 (E)	98.6GPa
锚索的最大拉伸极限	0.548MN
水泥浆抗压强度	20MPa
水泥浆剪切模量 (G_g)	9GPa
摩擦力 (忽略)	0

这里采用两种不同的方法计算在水泥浆中的最大剪切力。首先第一种方法是假设粘结剪切强度是单轴抗压强度的一半。如果水泥浆材料的抗压强度是 20MPa 并且低于周围岩石的强度, 则水泥浆的剪切强度为 10MPa。

在第二种方法中, 采用拉拔试验数据来计算水泥浆的剪切强度。直径为 15.9mm 的钢筋打入锚索孔, 粘结长度为 0.15, 实验结果为 70。假定锚索表面积是 0.0075m^2 ($0.05\text{m} \times 0.05\text{m}$), 那么可计算出水泥浆的最大剪切强度是:

$$4. \quad \frac{70 \times 10^3 \text{ N}}{0.0075 \text{ m}^2} = 9.33 \text{ MPa}$$

这个数值非常接近于上面估计的 10MPa，因此两种数值均可用于实际计算。假设破坏发生在锚索和水泥浆的交界面上，并用 $D+2t$ 代替 D ，那么单元长度的最大粘结力是：

$$5. \quad S_{bond} = \pi(0.0254 \text{ m}) \times (10 \text{ MPa}) = 800 \text{ kN/m}$$

粘结刚度 K_{bond} 是由式(3-170)得来的，对于上面假设的数值，粘结刚度可由 $1.5 \times 10^{10} \frac{\text{N/m}}{\text{m}}$ 计算得出。

因锚索长度为 2.5，考虑单位长度的影响，对 K_{bond} ， S_{bond} ， E 的数值和单位长度的拉伸屈服荷载都除以 2.5。

FLAC 的最终输入参数是：

$$K_{bond} = 6 \times 10^9 \text{ N/m}$$

$$S_{bond} = 3.2 \times 10^5 \text{ N/m}$$

$$E = 40 \text{ GPa}$$

$$yield = 2.2 \times 10^5 \text{ N}$$

$$area = 5 \times 10^{-d} \text{ m}^2$$

$$S_{friction} = 0$$

在锚索的公式推导中，FLAC 考虑了它的线性热膨胀的影响。对于考虑热量、热传导或者温度的中心初始化，温度都会改变的。假定网格和结构单元的温度始终保持一致，温度变化会使得在结构单元的轴向上发生热膨胀或压缩，而锚索的侧向膨胀可以忽略，也没有其他的耦合作用发生。

锚索单元热膨胀轴向力增量使用下式计算（轴向力压力为正）：

$$6. \quad \Delta F = EA\alpha\Delta T$$

这里 E 为单元的弹性模量， A 是截面面积， α 是线性热膨胀系数， ΔT 是单元的温度增量。

结构单元节点的温度增量是通过对寄宿域网格点的温度增量进行插值确定的并储存于结构单元节点的一个偏移量中，结构单元温度的变化是对两端节点求平均值计算得到的。锚索单元的热膨胀是热膨胀系数、每时步温度的变化和单元长度的乘积。

岩石中的锚索和锚杆在功能上两点不同：

(1) 低应力场中坚硬岩石的破坏经常是局部化的，多发生在与岩石开挖直接相连的岩石楔形体中。这时锚杆加固岩石边坡的效果在于提高节理面的局部剪切抗力以阻止楔形体位移和钢筋的轴向刚度一样，弯矩在抵抗剪切变形时是很重要的。在 FLAC 中，可用具有柔性刚度和岩石锚杆单元来模拟这类锚杆行为。

(2) 如果弯曲的影响不是很重要，锚索单元就足以模拟锚杆，因为这些锚索单元可以用水泥浆和锚索或者水泥浆和围岩介质之间所提供的粘结剪切抗力来模拟沿着锚杆长度的剪切抗力。在 FLAC 的锚索单元公式推导中，不仅考虑了对局部加固的影响，也考虑了主要沿着全长抵抗变形的作用。下面的锚固数值公式就考虑了水泥浆加固圈的剪切行为。

在接下来的公式推导中，基质材料都假定为岩石材料，但是对于土体的情况也适用。

每根锚索被分成许多个长度为 L 的段, 并且在每个段的末尾都有节点。各个分段的质量都会集中在节点处, 这与 FLAC 的连续介质公式是类似的。

2. 轴向效应

通常加固系统的轴向强度被认为完全由加固单元本身决定。这些加固物通常都是钢材采用钢筋或钢索。由于这些加固单元一般都比较细, 只能提供很小的弯曲抗力 (特别是对锚索的情况), 因此被视为是只能承受单轴拉伸的一维单元 (受压也可以, 但是当模型主要承受到压力荷载时, 最好还是采用桩的模型)。对于描述加固单元的轴向效应, 一维模型已经足够了。在理论公式中, 采用锚固体截面积 A 和杨氏模量 E 来描述其轴向刚度。

轴向力增量 ΔF^t 是由下式中的轴向位移增量计算得出的:

$$\Delta F^t = -\frac{EA}{L} \Delta u^t \quad (3-172)$$

$$\begin{aligned} \text{这里, } \Delta u^t &= \Delta u_i t_i \\ &= \Delta u_1 t_1 + \Delta u_2 t_2 \\ &= (u_1^{[b]} - u_1^{[a]}) t_1 + (u_2^b - u_2^a) t_2 \end{aligned}$$

上标 $[a]$, $[b]$ 指节点的编号, 方向余弦 t_1 和 t_2 表示锚索的切向和轴向。

可指定锚索的拉伸屈服极限 (yield) 和压缩屈服极限 (ycomp), FLAC 采用锚索的拉应力或压应力的屈服点强度曲线, 那么系统认为锚索在该方向的强度为零。

在研究加固体中的轴向力时, 需计算沿锚固体的轴向节点处的位移, 也需要计算锚固体的每个节点处的轴向非平衡力以及沿着水泥浆环面的剪切作用的剪切力。根据运动定律在每节点的非平衡轴力和节点质量综合考虑计算锚索的轴向位移。

3. 水泥浆孔环面的剪切强度

采用位于节点处的弹簧—滑块系统描述水泥浆加固圈的剪切行为, 在锚索和水泥浆界面及水泥浆和围岩交界面上产生相对位移时, 水泥浆加固圈的剪切力可由水泥浆剪切刚度表示为:

$$\frac{F_s}{L} = K_{bond} (u_c - u_m) \quad (3-173)$$

式中, F_s 为水泥浆体内产生的剪切力 (沿锚索单元和网格之间的界面); K_{bond} 为水泥浆的剪切刚度; u_c 为锚索的轴向位移; u_m 为岩土界面的轴向位移; L 为有效锚固单元的长度。

每单元长度上水泥浆内可能达到的最大剪力是水泥浆强度和 (与应力相关) 摩擦抗力的函数, 根据下式确定:

$$\frac{F_s^{\max}}{L} = S_{bond} + \sigma'_c \times \tan(S_{friction}) \times perimeter \quad (3-174)$$

式中, S_{bond} 为固有剪切强度或粘聚力; σ'_c 为单元法向方向的平均有效围岩压力; $S_{friction}$ 为摩擦角; $perimeter$ 为单元的周长。

单元法向平均有效围压应力值是由下式确定的:

$$\sigma'_c = -\left(\frac{\sigma_{nn} + \sigma_{zz}}{2} + p \right) \quad (3-175)$$

式中, p 为孔隙压力; σ_{zz} 为平面外的应力; $\sigma_{nn} = \sigma_{xx} n_1^2 + \sigma_{yy} n_2^2 + 2\sigma_{xy} n_1 n_2$; n_i 为根据式

(3-159) 确定的单位向量。

在计算水泥浆和岩石交界面的相对位移时，在计算锚索节点处的轴向岩石的位移时，FLAC 采用了插值法：假定锚索的每个节点都位于某个 FLAC 网格域内（该域被称为寄宿域），锚索节点到寄宿域各网格点的距离作为权重因子进行插值，权重因子的计算以满足弯矩平衡为原则。在 FLAC 中采用同样的插值方法将水泥浆和岩石交界面产生的力反馈到寄宿域网格点上。

4. 水泥浆表面的法向效应

如前所述，在锚索的每个节点处都由内插法计算网格的速度。如果节点两边的锚索单元是同轴线的，那么节点在网格上不会产生法向方向的力；但是它们之间有个角度，它们的轴向力将作用于平均法线方向。这个“净”力以相反的方向作用在网格和锚索节点上。因此，在大应变模式下，如果允许锚索单元产生有限挠曲，则最初值的锚索也能承受法向载荷。

3.5.4 桩单元

1. 公式推导

在 FLAC 中，桩单元结合了梁单元和锚索单元的特性。桩单元是在每个节点处具有三个自由度（两个位移，一个转动）的二维单元。对于桩单元的结构公式推导与前述梁单元类似。一段桩单元是被当作一种没有轴向屈服的线弹性材料，就如梁单元一样，可以指定塑性弯矩和铰接条件。

桩单元在 FLAC 网格中的相互作用是通过剪切和法向的连接弹簧实现的。这种连接弹簧是非线性节点，通过它在桩单元节点和寄宿域网格点之间传递力和运动，公式推导与锚索单元很类似。剪切连接弹簧的特性与水泥浆的剪切特性的表述很相似。法向连接弹簧的特性包括模拟反向载荷以及在桩和岩土介质网格之间形成的间隙。法向连接弹簧基本上是用来模拟桩周介质对桩的挤压效果，法向的连接弹簧的力—位移法则也可以用外部的 FISH 函数定义。

连接弹簧和 FLAC 中桩单元的关系 $p-y$ 与曲线所示载荷—位移关系很类似（Coduto, 1994）。但是 $p-y$ 曲线试图去模拟分析桩和整体岩土介质间的相互作用。FLAC 的连接弹簧也可以模拟连续墙和介质接触的影响。但是在这种情况下，建议使用两边带有界面单元的梁单元，因为界面能较好地模拟墙和岩土的分离效应，例如可以这样模拟地下连续墙。

2. 剪切连接弹簧的力学特性

桩和网格的交界面的剪切强度是由一个在桩的端节点处的弹簧—滑块系统表示的；这个系统与锚索和网格界面模型有些类似。在桩节点和围岩网格之间的相对位移产生的剪切力在数值上由连接弹簧曲线剪切刚度表示，如下：

$$\frac{F_s}{L} = cs_{stiff}(u_p - u_m) \quad (3-176)$$

式中， F_s 为剪切连接弹簧产生的剪切力（沿桩单元和网格单元交界面）； cs_{stiff} 为连接弹簧的剪切刚度（ cs_{stiff} ）； u_p 为桩的轴向位移； u_m 为岩土介质界面的轴向位移； L 为作用的单元长度。

沿桩—网格界面可能产生的最大剪切力是界面粘结强度和沿着界面（与压力相关）的摩

擦力的函数，下面的式子用来确定单位长度桩的最大剪切力：

$$\frac{F_s^{\max}}{L} = cs_{scoh} + \sigma'_c \times \tan(cs_{sfric}) \times perimeter \quad (3-177)$$

式中， cs_{scoh} 为剪切耦合弹簧的粘结强度； σ'_c 为垂直于桩单元的平均有效侧限应力； cs_{sfric} 为剪切耦合弹簧摩擦角； $perimeter$ 为单元的暴露周长。

垂直于单元的平均有效侧限应力可由下面的等式得出：

$$\sigma'_c = -\left(\frac{\sigma_{nn} + \sigma_{zz}}{2} + p\right) \quad (3-178)$$

式中， p 为孔隙压力； σ_{zz} 为平面外的应力； $\sigma_{nn} = \sigma_{xx}n_1^2 + \sigma_{yy}n_2^2 + 2\sigma_{xy}n_1n_2$ ； n_i 为式(3-159)中定义的单位向量。

3. 法向连接弹簧的力学行为

桩单元的法向连接弹簧的材料特性的计算：

$$\frac{F_n}{L} = cs_{nstiff}(u_p^n - u_m^n) \quad (3-179)$$

式中， F_n 为法向耦合作用的法向力（沿桩单元和网格单元界面）； cs_{nstiff} 为耦合弹簧的法向刚度； u_p^n 为垂直于桩轴向方向的桩的位移； u_m^n 为垂直于桩的轴向方向的界面的位移； L 为有效单元长度。

通过网格，可以采用侧限法向力来模拟桩局部的三维挤压效应（如单桩被周边岩土挤压），下式可用来计算单位长度的桩的最大法向力：

$$\frac{F_n^{\max}}{L} = cs_{ncoh} + \sigma'_c \times \tan(cs_{nfri}) \times perimeter \quad (3-180)$$

式中， cs_{ncoh} 为法向耦合弹簧的粘结强度，与荷载方向有关； σ'_c 为垂直于桩单元的平均有效侧限应力； cs_{nfri} 为法向耦合弹簧的摩擦角； $perimeter$ 为单元的外周长。

粘结强度是由两个关键材料特性 cs_noch 和 cs_netn 定义的，这个数值将用在式(3-179)中，是由桩节点的运动方向决定的，在概念上认为在桩的每个节点有一个法向弹簧。沿着桩单元节点 n 到 $n+1$ 的方向，正的法向运动被定义在左面，弹簧压缩情况下认为在正法向方向节点位移是在正位移，使用 cs_noch ，弹簧在拉伸情况下，认为负法向方向节点的位移是负位移，使用 cs_nten 。双重的粘结力参数对于模拟桩两侧存在不同的条件时很有用，如桩作为挡土墙的情况下。 cs_nten 除非特别指出，它的数只是默认为 cs_ncoh ，这时两侧法向运动的响应是相同的。

4. 桩单元得材料参数

在 FLAC 中，桩单元需要输入以下参数：

- (1) 桩的横截面积；
- (2) 桩的截面惯性矩（通常指力矩）；
- (3) 桩的密度（可选项，用于动态分析和重力荷载分析）；
- (4) 桩的弹性模量；
- (5) 塑性矩（可选项，除非特别说明，可假定塑性矩是足够大的）；

- (6) 桩的外周长（如桩的表面与岩土交界面的周长）；
- (7) 切线耦合弹簧的刚度；
- (8) 切向耦合弹簧的粘聚强度；
- (9) 切向耦合弹簧的摩擦阻力；
- (10) 法向耦合弹簧的刚度；
- (11) 法向耦合弹簧的粘聚（及抗拉）强度；
- (12) 法向耦合弹簧的摩擦阻力；
- (13) 在桩和岩土交界面之间的法向间隙；
- (14) 列间距。

可以指定桩单元截面的高度和宽度（如果是圆截面则用半径）值来代替面积和惯性矩，面积和惯性矩也可由计算得出。确定桩单元参数和梁单元的方式很类似。桩单元的外部周长和连接弹簧参数的选择应满足桩单元—岩土交界面的接触强度相当才能进行分析。

桩和岩土共同作用的机理由桩是预知的还是现浇的决定。共同作用可用沿桩长的剪切抗力描述。主要承载力由沿桩轴向方向岩土的摩擦或粘结力提供，现浇端承载桩主要通过桩端附近的岩土作为它的主要支撑。

在许多情况下，有关描述桩和岩土共同作用的具体参数不容易取得，但现场岩土性质通常可以通过标准现场或实验室测试取得。桩和岩土的剪切力能从岩土的参数中估算。如果认为桩—岩土的破坏是发生在岩土中，那么认为 cs_sfric 和 cs_scoh 的低限是与岩土的摩擦角（ cs_sfric ）和岩土粘聚力乘以桩的周长（ cs_scoh ）有关的。如果破坏发生在桩—岩土的接触面，应减少 cs_sfric 和 cs_scoh 值来反映桩表面的光滑性。

当对桩施加了侧向荷载，桩和介质之间会产生一个间隙。如果荷载反向，桩在反向对岩土加载前需要把这个间隙先合起来。这个间隙的总数值是一个累积的量。参数 cs_ngap 可以具体指出这个间隙有多大，如果 $cs_ngap=0$ 则可完全忽略这个间隙，这样这个桩总是被认为是与介质接触的，而如果 $cs_ngap>0$ 则桩在对岩土能够加载前需要把这个间隙合起来。

3.6 二维单元

3.6.1 二维岩石锚杆单元

1. 公式推导

岩石锚杆单元是基于桩单元模型建立的，并考虑了轴向、弯曲效应。在法向和切向与岩土介质网格的连接都是经过连接弹簧连接的。岩石锚杆的模型用来分析非线性围压影响、水泥浆和树脂粘结、拉力破裂特性等。下面给出岩石锚杆的其他特性。

(1) 岩石锚杆单元轴向在拉伸和压缩应力下达到屈服状态。

(2) 可以基于用户自定义的拉应变破坏极限（ $tfstrain$ ）来模拟岩石锚杆的破坏情况。岩石锚杆节点单元段的平均轴向塑性应变，并考虑锚杆的弯曲塑性应变，总塑性拉应变由下式计算：

$$\varepsilon_{pl} = \sum \varepsilon_{pl}^{ax} + \sum \frac{d \theta_{pl}}{2 L}$$

式中， d 为岩石锚杆的直径； L 为岩石锚杆段的长度； θ 为岩石锚杆的平均旋转角。

如果应变超过了极限 `tfstrain`，该岩石锚杆段的力和弯矩都置于零，并且认为岩石锚杆已经破坏。

(3) 作用在岩石锚杆的有效侧压力（杆体围压）是根据安装后应力变化计算得到的，对于桩单元，有效侧压力的计算是基于桩单元周围区域当前应力确定的。

(4) 用户可通过自定义表格 `cs_cftable` 给出参数修正的有效侧限压力。

(5) 用户可通过定义表格 `cs_sctable` 和 `cs_sftable` 来确定切向连接弹簧的粘聚力和摩擦角参数与剪切位移的软化函数。

2. 岩石锚杆单元的参数

在 FLAC 中岩石锚杆单元需要输入下列参数：

- (1) 岩石锚杆的横截面积 $[L^2]$ ；
- (2) 岩石锚杆的界面的惯性矩 $[L^4]$ ；
- (3) 岩石锚杆的密度（质量/体积）（可选项，动力分析和考虑重力荷载情况下）；
- (4) 岩石锚杆的弹性模量[应力]；
- (5) 间距（可选项）；
- (6) 塑性矩[力—长度]；
- (7) 岩石锚杆的拉力屈服强度[力]；
- (8) 岩石锚杆的压力屈服强度[力]；
- (9) 岩石锚杆的拉应变极限；
- (10) 岩石锚杆的粘结段净长 $[L]$ ；
- (11) 剪切连接弹簧的刚度[力/岩石锚杆的长度/位移]；
- (12) 剪切连接弹簧的粘聚力强度[力/岩石锚杆的长度]；
- (13) 剪切连接弹簧的摩擦系数[度]；
- (14) 剪切连接弹簧与相对剪切位移相关的粘聚力的表格数；
- (15) 剪切连接弹簧与相对剪切位移相关的摩擦角的表格数；
- (16) 与偏应力相关的侧限应力系数的表格数；
- (17) 法向连接弹簧的刚度[力/岩石锚杆的长度/位移]；
- (18) 法向连接弹簧的粘聚力（和拉力）强度[力/岩石锚杆的长度]；
- (19) 法向连接弹簧的摩擦系数[度]。

岩石锚杆单元的半径可以用来代替横截面积，并通过半径可自动求出横截面积和惯性矩。岩石锚杆单元参数的确定与梁单元的方式很类似。用户可限定岩石锚杆节点的塑性矩和塑性铰，与塑性铰相关的软化系数也可由用户定义。

3.6.2 二维条形锚单元

1. 公式推导

条形锚单元由法国 `Terre Armee` 等人开发的，条形锚是一种专门设计用来模拟薄的、平面

加强条形结构，最典型的就是为了土筑堤坝而设置的成层加固结构。

条形锚单元和锚索单元有相似的性质。条形锚单元和岩土锚杆的强度很类似，都能在拉或压力下屈服，而且可以定义其破坏极限，条形锚提供了剪切抵抗力，但是和锚索单元一样，不能承受弯矩。另外，定义了条形锚和岩土接触面上剪切强度的非线性破坏包络线，它是用户自定义的接触应力的函数。

条形锚单元具有下列特性：

- 条形锚的加固是由每单元计算宽度（calwidth）的条形锚（nstrips）数量决定的，也要输入条形锚厚度（strthickness）和条形锚宽度（strwidth）等参数。
- 条形锚的弹性刚度是由每单位计算宽度条形锚横截面积和条形单元材料的杨氏模量定义的。
- 条形锚单元在拉力（由条形锚拉伸屈服极限 *stryield* 决定）和压力（条形锚单元压缩屈服极限 *stromp*）作用下可能会屈服。
- 条形锚单元的破坏是由用户定义的拉破坏应变极限（*tfstrain*）来模拟。在每个条形锚的分割段，沿条形锚单元的破坏计算中，除没有包括弯曲应变以外，其他与岩石锚杆的公式类似。如果在条形锚单元某段的所有塑性应变超过了拉伸屈服应变极限，那么假定该段已屈服，在条形锚单元段的力将设置成零。
- 条形锚单元和岩土接触面的剪切强度是由非线性的剪切破坏包络线确定的，而包络线是随侧限压力函数改变的，最大剪切力由下式确定：

$$\text{如果 } \sigma'_c < 0: \quad F_s^{\max} = S_{bond} \quad (3-181)$$

$$\text{如果 } \sigma'_c \geq 0: \quad F_s^{\max} = S_{bond} + \sigma'_c \times f^s \times \text{perimeter} \quad (3-182)$$

$$\text{如果 } 0 \leq \sigma'_c \leq \sigma'_{c0}: \quad f^s = f_0^* - (f_0^s - f_1^s) \times \frac{\sigma'_c}{\sigma'_{c0}} \quad (3-183)$$

$$\text{如果 } \sigma'_c > \sigma'_{c0}: \quad f^s = f_1^* \quad (3-184)$$

式中， L 为条形锚单元长度； S_{bond} 为条形锚的接触面粘聚力； σ'_c 为垂直于条形锚的有限侧限应力；*perimeter* 为条形锚的周长； f_0^* 为初始的表观摩擦系数； f_1^* 为最小的表观摩擦系数； σ'_{c0} 为改变的侧限压力。

有效侧限压力垂直作用于条形锚平面上，有：

$$\sigma'_c = -\sigma'_{nn} - p \quad (3-185)$$

式中， p 为孔隙压力； $\sigma'_{nn} = \sigma_{xx}n_1^2 + \sigma_{yy}n_2^2 + 2\sigma_{xy}n_1n_2$ ； n_i 为垂直于条形锚的单位向量。

用户可以通过自定义表格 *cs_sctable* 和 *cs_sftable* 来确定切向连接弹簧的粘聚力和摩擦角参数与剪切位移软化函数。

2. 条形锚单元的参数

在 FLAC 中条形锚单元需要下列输入参数：

- (1) 计算宽度[长度]；
- (2) 条形锚的密度[质量/体积]；
- (3) 条形锚的弹性模量[应力]；

- (4) 在条形锚—岩土界面的初始表观摩擦系数 (f_0^*) [度];
- (5) 在条形锚—岩土界面的最小表观摩擦系数 (f_1^*) [度];
- (6) 每单位宽度上的条形锚数量;
- (7) 有限侧限压力 (σ'_{c0}) [应力];
- (8) 条形锚—岩土界面上的剪切刚度[力/条形锚的长度/位移];
- (9) 与条形锚—岩土界面塑性剪切位移相关的摩擦角表格数;
- (10) 与条形锚—岩土界面塑性剪切位移相关的粘聚力表格数;
- (11) 与条形锚—岩土界面塑性剪切位移相关的摩擦角表格数;
- (12) 条形锚的厚度[长度];
- (13) 条形锚的宽度[长度];
- (14) 条形锚的压缩屈服极限[力];
- (15) 条形锚的拉伸屈服极限[力];
- (16) 条形锚的拉应变破坏极限。

条形锚单元周长是条形锚宽度、数量和计算宽度共同决定的:

$$perimeter = \frac{2 \times strwidth \times nstrips}{calwidth} \quad (3-186)$$

条形锚与岩土接触面的粘聚力是由每个条形锚的粘聚力 ($strbond$)、条形锚数量 ($nstrips$) 和它的计算宽度 ($calwidth$) 共同决定的:

$$S_{bond} = \frac{strbond \times nstrips}{calwidth} \quad (3-187)$$

3.6.3 二维支撑单元

1. 理论推导

二维支撑 (Support) 单元的公式推导并非基于增量方法, 支撑构件单元建立后, 其内力与构件轴向和横向的位移累计值有关。当具有非零宽度的支撑构件 (即可继续划分为子构件单元) 时, 每个子构件单元的内力可由如下方法之一计算:

$$F = k^t / (n + 1)$$

或:

$$F = f(u) / (n + 1) \quad (3-188)$$

式中, n 为子构件单元数目; u 为子构件单元位移; $f(u)$ 为查表确定的函数 (用户定义); k^t 为切向 (轴向) 刚度。

2. 支撑单元特性

支撑单元需输入如下参数:

- 支撑 (Support) 单元的轴向刚度 (力/位移);
- 支撑 (Support) 单元的压缩屈服强度 (力);
- 间距。

如果支撑单元包含子构件单元, 则轴向刚度和压缩屈服极限强度指的是子支撑构件单元群的综合指标。轴向力和位移的关系也可以由用户定义的表格确定, 单用户定义表格不适用于

支撑单元卸载。另外，如使用表格，间距值将不起作用。

3.7 三维单元

3.7.1 三维壳体结构单元

三维壳体结构单元包括壳、土工格栅、衬砌等结构单元。根据这些壳体的力学性能主要包括两方面：壳体材料自身的结构响应和壳体与岩土介质之间的相互作用，壳体材料自身的响应对于所有的壳体类型结构都是普遍适用的，将在这部分论述。不同的壳体各自的特性将在后文论述。

1. 力学性能

每种壳体结构单元（shellSEL 壳体、土工格栅、LinerSEL 衬砌等）是由它们的几何和材料特性定义的。壳体结构单元被认为是一个在三个节点上具有统一厚度的三角形。任意弯曲成壳体结构能用具有多个小块的平面来模拟，每个壳体单元特性视为各向同性或各向异性的线弹性材料，且没有破坏极限；当然，也可以使用沿壳体单元边缘的塑性铰线模型。考虑了每个壳体单元类型在网格中不同的相互作用方式，壳体结构响应由被分配到 SEL 的有限单元控制，这里有 5 种单元：2 个膜单元，1 个平板弯曲单元和 2 个壳体单元。因为这些全是薄壳有限单元，因此可以基于薄壳结构进行壳体建模，厚壳结构应该用 FLAC3D 建模。

每种壳体类型都有自己的局部坐标系，该系统是专门用来指定材料特性和施加外荷载的，一个独立的表面坐标系统是用来恢复应力的，壳体结构单元 SEL 的坐标系统是由分别标注为 1、2、3 位置的三个节点定义的，定义如下：

- 壳体类型 SEL 结构单元位于 xy 平面内。
- x 轴线方向由节点 1 到节点 2 定向。
- z 轴线是垂直于结构单元 SEL 的平面，并且从壳体中“向外”定为正（壳体单元的两个面，分别被指定为“向外”和“向内”），不能修改壳体类型 SEL 的局部坐标系。

2. 响应大小的监控

对于壳体结构单元，均可再现壳体的应力合成和应力分解的大小。在局部坐标系提供壳体中截面附近的壳体结构的应力合成结果，总应力则基于整体坐标系中表述，应力大小可通过 FISH 语言给出：

- 用 PRINT sel recover type 命令可以打印出来，这里 $type = \{sres, stress, pstress\}$ 。
- 用 HISTORY sel recover 命令监控。
- 用 sel recover 命令绘图。

3. 三维壳体结构单元的参数

壳体结构单元 SEL 有下面 4 个参数：

- (1) density: 质量密度（可选项，动力学模型或者考虑重力时） $[M/L^3]$ ；
- (2a) isotropic: 各向同性材料，杨氏模量 $[M/L^2]$ 和泊松比 ν ；
- (2b) orthotropic: 正交各向异性参数 \bar{e}_{11} 、 \bar{e}_{12} 、 \bar{e}_{22} 、 \bar{e}_{33} ；

(3) **thexp**: 热膨胀系数 $\alpha^t [1/T]$;

(4) **thickness**: 厚度 $t [L]$ 。

材料的组成特性既可能是各向同性的,也可能是正交各向异性的,因此必须用(2a)和(2b)分别指出,4个正交各向异性参数的详细描述如下。

在线弹性假定条件下,一般材料刚度矩阵是对称的并且可以用相关的21个独立弹性常数表达出来,材料刚度矩阵 $[E]$ 与应力 $\{\sigma\}$ 和应变 $\{\varepsilon\}$ 的关系是: $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$ 。

正交各向异性材料在三个主方向弹性对称,其材料刚度矩阵能用9个相关独立弹性常数 $\{e\}$ 表达出来,则:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & & & \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & & & \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & & & \\ & & & e_{44} & & \\ & & [0]_{3 \times 3} & & e_{55} & \\ & & & & & e_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3-189)$$

这里 x, y, z 是弹性对称方向的三个方向。

基于平面应力薄板假定 ($\sigma_{zz} = 0$), 没有横向剪切应变 ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$), 材料刚度矩阵可以用4个独立的弹性常数 $\{\bar{e}\}$ 表示, 即:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{e}_{11} & \bar{e}_{12} \\ \bar{e}_{21} & \bar{e}_{22} \\ & \bar{e}_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \bar{e}_{12} = \bar{e}_{21} \quad (3-190)$$

壳体中截面位于平面上, 式(3-190)也被用到局部坐标系的每个壳体单元中。如果弹性对称方向与壳体结构单元的局部坐标系不一致, 则需要适当地旋转。

对正交各向异性壳体, 4个弹性常数 $\{\bar{e}\}$ 能用9个弹性常数 $\{e\}$ 来表达, 如下:

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_{11} = e_{11} - \frac{e_{13}e_{13}}{e} \\ \bar{e}_{22} = e_{22} - \frac{e_{23}e_{32}}{e} \\ \bar{e}_{33} = e_{44} \\ \bar{e}_{12} = e_{12} - \frac{e_{13}e_{32}}{e_{33}} \end{Bmatrix} \quad (3-191)$$

对于各向同性材料的壳体, 4个弹性常数 $\{\bar{e}\}$ 能用两个弹性常数, 即杨氏模量 E 和泊松比 ν 表示如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{E}{1-\nu_2} \\ e = \frac{E}{1-\nu^2} \\ e = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ e = \nu \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \end{array} \right. \quad (3-192)$$

3.7.2 三维土工格栅单元

1. 力学性能

土工格栅单元用来模拟与土发生剪切相互作用的柔性膜，如土木织物、土工格栅和土工膜等材料，但不能承受弯曲作用。这种单元材料可以是各向同性或正交各向异性线性弹性材料，没有破坏极限。土工格栅在表面切平面方向与 FLAC3D 网格之间可以发生摩擦剪切作用，在法向上则依附于网格。土工格栅也可被看成是与一维锚索相类似的二维结构物。

FLAC3D 中内嵌了土工格栅单元，单元应力由有效侧限应力 σ_m 和总剪切应力 τ 组合而成，由薄膜应力来平衡，薄膜应力由合力 \bar{N} 表示。在土工格栅单元的节点处，用弹簧—滑块模拟土工格栅切平面力学行为，弹簧—滑块方向是基于土工格栅与围岩介质相对剪切位移 u_s 方向变化的。在每个节点处都有一个弹簧滑块，使土工格栅单元力学特性与粗网孔和十字连接的筋合相似。弹簧—滑块在土工格栅表面两侧的整个附属区域中传递总剪切力，同时假定有效侧限应力在土工格栅两面是相等的。

在土工格栅和岩石的接触面上的法向力学特性描述如下，土工格栅和岩石接触面上的剪切力大小由粘结摩擦特性控制，即由连接弹簧参数：①单元面积的刚度 k ；②粘结强度 c ；③摩擦角 ϕ ；④有效侧限应力 σ_m 共同决定。

有效侧限应力 σ_m 垂直于土工格栅的表面，在每个土工格栅节点都要计算，设垂直于土工格栅表面的方向为 z ，则 σ_m 数值可由下式确定：

$$\sigma_m = \sigma_{zz} + p$$

式中， p 为孔隙压力。

在土工格栅和岩石接触面上相对唯一的计算，根据在节点相连单元的位移场，采用插值方法计算网格位移。插值法是通过到单元网格点的距离取加权系数实现，采用同样的插值法将土工格栅围岩界面上产生的力反算到网格点。

如上所述，在每个土工格栅的节点处都用插值计算网络速度。垂直于土工格栅表面的速度是直接转移到该节点处，在法向上土工格栅节点运动受围岩网格运动控制。如果共享节点的土工格栅不是共面的，那么其薄膜力将按照比例作用在法线方向上。该力不仅作用在围岩网格上，而且以相反方向作用在土工格栅节点上。采用大应变模式求解时，一个最初是平坦的土工格栅网格，如果容许有限挠曲变形，它就可承受法向荷载。

在计算网格采用大应变模式时，土工格栅可以通过插值点位置在网格内移动来模拟大应变滑移。这就允许用户通过土工格栅节点和围岩之间的滑移进行大应变计算和土工格栅破坏厚

的行为。如果某土工格栅节点移出了所有计算单元，稍后该节点又移回到计算单元内，其与单元的连接不能被重建；但是如果土工格栅节点只是在计算单元间滑移，其与计算的连接却会保持完整。

2. 土工格栅单元的参数

每个土工格栅结构单元都有下面 9 个参数：

- density: 质量密度（可选项，动力学模型或者考虑重力时）；
- isotropic: 各向同性材料的参数：杨氏模量和泊松比；
- orthotropic: 正交各向异性的参数 \bar{e}_{11} , \bar{e}_{12} , \bar{e}_{22} , \bar{e}_{33} ；
- thexp: 膨胀系数 $\alpha_t [1/T]$ ；
- thickness: 厚度 $t [L]$ ；
- cs_scoh: 连接弹簧的粘聚力（应力单位） $c [F/L^2]$ ；
- cs_sfric: 连接弹簧的线的摩擦角 ϕ [度]；
- cs_sk: 连接弹簧的每单位面积刚度 $k [F/L^3]$ ；
- slide: 大应变滑移标记，默认为关；
- slide_tol: 容许的大应变滑移值。

3.8 本章小结

本章主要介绍了 FLAC 程序中的本构模型与单元，包括弹性模型和开挖模型、M-C 和 D-P 塑性模型、应变硬化—软化模型、双屈服、剑桥、霍克布朗模型、梁、衬砌、锚索和桩单元、二维单元和三维单元。具体内容如下：

在弹性模型和开挖模型一节中，介绍了各向同性弹性模型、横观各向异性弹性模型和 Null Model 开挖模型。

在 M-C 和 D-P 塑性模型一节中，介绍了 Mohr-Coulomb 塑性模型和 Drucker-Prager 塑性模型，每个模型包括增量弹性理论、屈服准则和流动法则、塑性应力调整。

在应变硬化—软化模型一节中，介绍了应变硬化与软化模型、节理化模型、双线性应变硬化—软化的节理化模型。

最后介绍了双屈服模型、修正的剑桥粘土模型、霍克—布朗模型，梁单元、衬砌单元、锚索单元、桩单元、二维岩石锚杆单元、二维支撑单元、三维壳体结构单元、三维土木格栅单元。